非対称自然振動数分布を持つ蔵本モデルの分岐解析

米田亮介, 山口義幸

京都大学情報学研究科

蔵本モデル

同期現象は振動子が相互作用を通じて振動のタイミングを揃える現象のことであり、自然界の様々なところで現れる(ホタル, ニューロンの発火, 概日リズム, 心臓の鼓動)。**蔵本モデル**は同期現象を表す代表的なモデルである。

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i),\ i = 1, \cdots, N$$

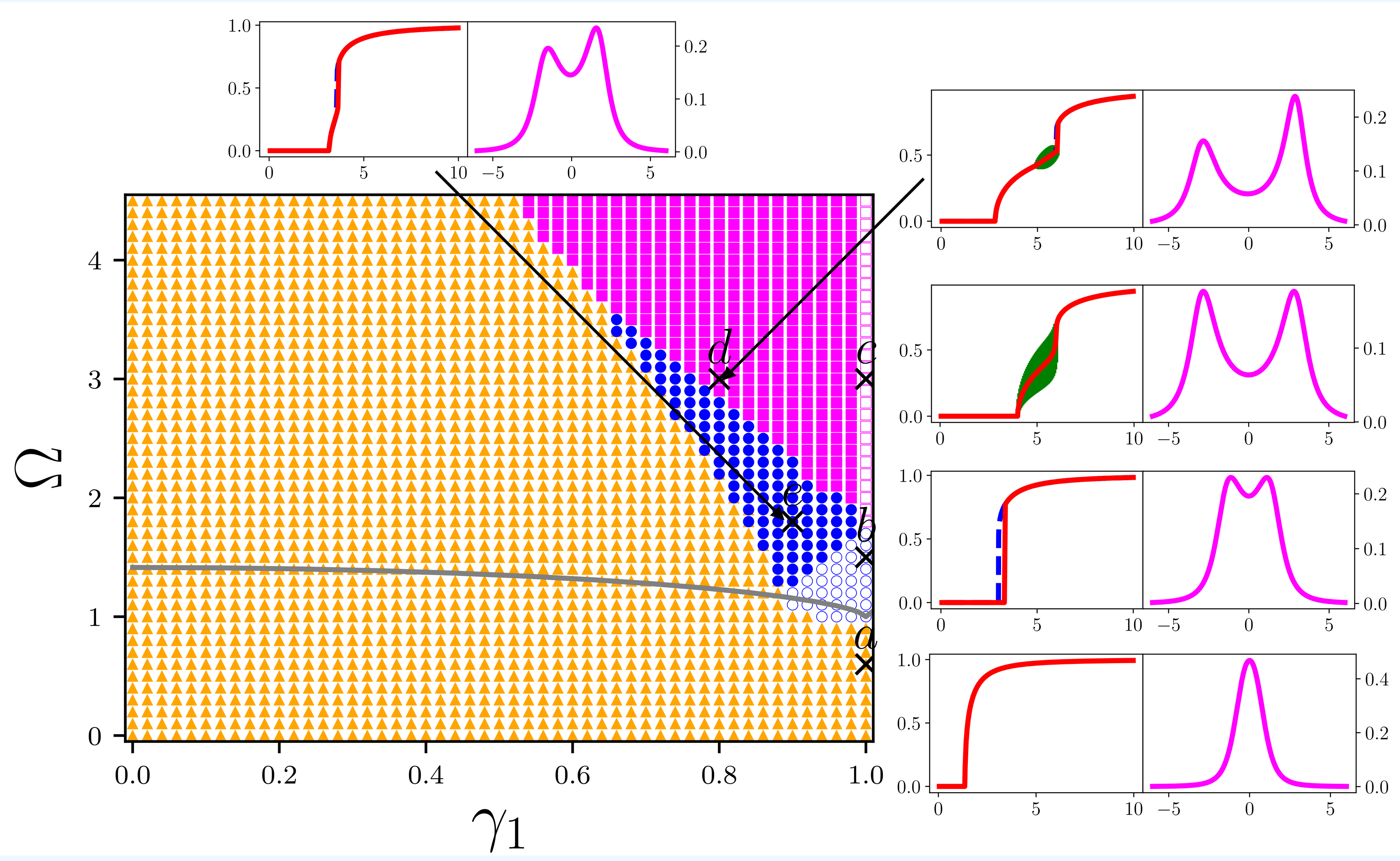
ω_iは自然振動数と呼ばれ、確率密度関数$g(\omega)$に従って選ばれる。Kは相互作用の強さを決める結合強度である。**秩序変数**は振動子がどれほど同期をしているのかを決めるパラメータである。

$$z = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j} =: re^{i\psi}$$

蔵本予想によると、$N \to \infty$のときに$g(\omega)$が一山対称の場合には秩序変数rは、$K < K_c$のときは$r = 0$、$K > K_c$のときは$r > 0$がそれぞれ漸近安定になることが知られている[1]。また、二山対称な分布関数についても分岐図のことが多くわかっている[2]。しかし、**非対称な分布**の場合にどのような分岐図が得られるかはあまりわかっていない。

自然振動数分布[3]

$$g(\omega) = \frac{C}{[(\omega - \Omega)^2 + \gamma_1^2]\,[(\omega + \Omega)^2 + \gamma_2^2]}$$



非対称な自然振動数分布についてどのような分岐図が得られるのかを理論的に解析したい！

$N \to \infty$

蔵本モデルの$N \to \infty$を考えると、粒子数保存の観点から次の連続の式で表される。

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta}(vF) = 0,$$

$$v = \omega + K\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta', \omega', t)\sin(\theta' - \theta)d\theta' d\omega'$$

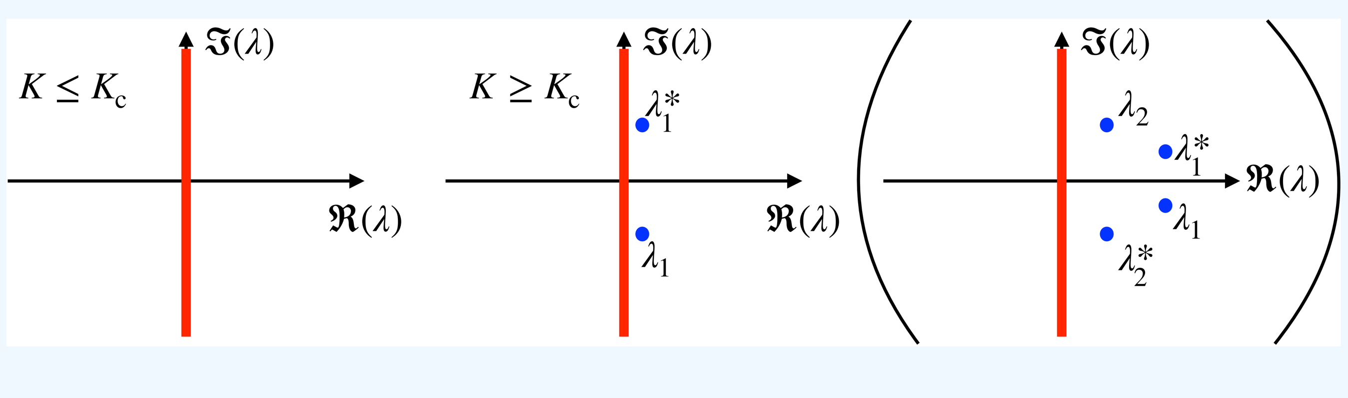
ここで$F(\theta, \omega, t)$は時刻tにおけるθ, ωの確率密度関数である。この連続の式は定常解

$$F = f^0 = \frac{g(\omega)}{2\pi}$$

を持ち、このとき秩序変数はKによらずに$z = 0$である。
$F = f^0 + f$とし、定常解周りの摂動を考える。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{L}f + \mathcal{N}f$$

Kを変化させた時の$\mathcal{L}$のスペクトルは次のように変化する。

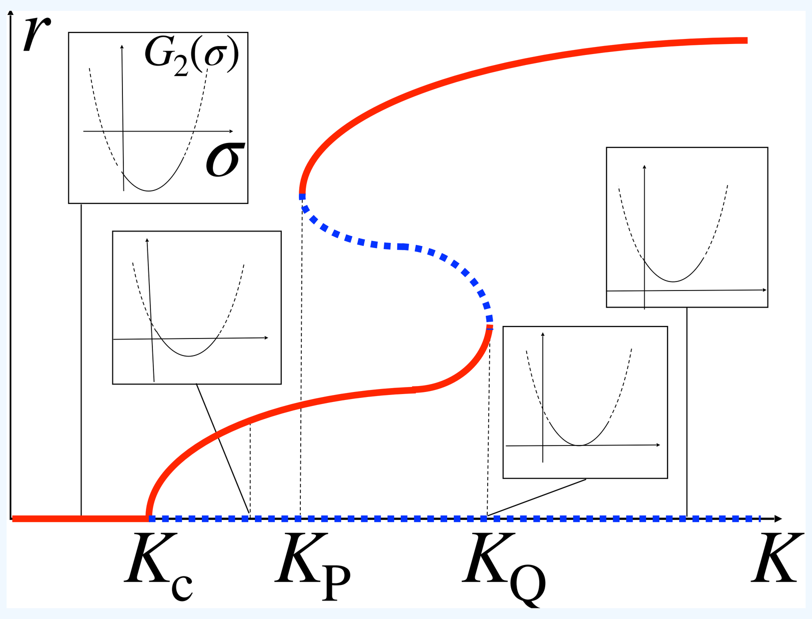


不連続転移

中心多様体縮約の理論を用いると、十分小さなrに対して**振幅方程式**が得られる。

$$\dot{\sigma} = 2\sigma G(\sigma)$$

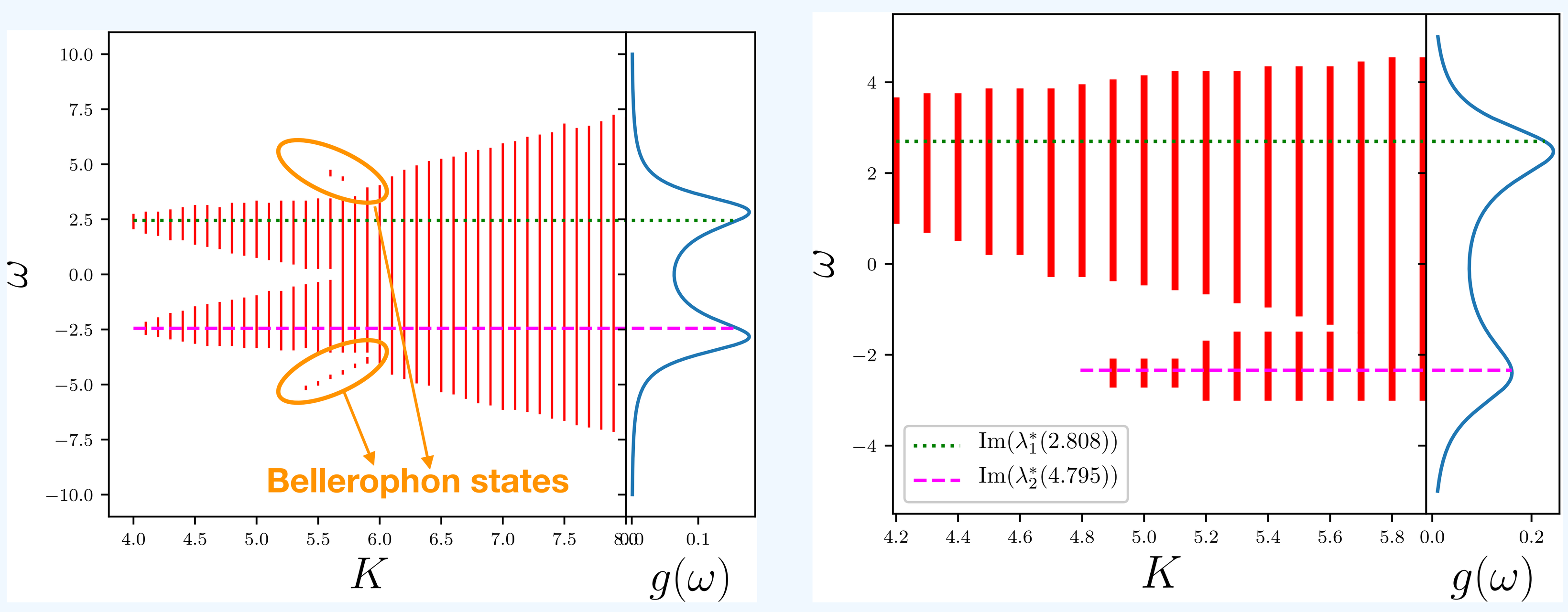
$$G(\sigma) = \Re(\lambda_1) + \Re(c_3)\sigma + \Re(c_5)\sigma^2 + O(\sigma^3)$$



ここで$\sigma \sim |r|^2$である。$K = K_c$上での転移について調べると、$\Re(c_3(K_c)) < 0$のとき、**連続転移**、$\Re(c_3(K_c)) > 0$のとき、**不連続転移**となることが予想される。また、$K > K_c$で不連続な転移が起こるかどうかは、$G(\sigma)$を2次まで縮退させた$G_2(\sigma) = \Re(\lambda_1) + \Re(c_3)\sigma + \Re(c_5)\sigma^2$を用いることにする。右図のように、$K_c$から出る安定なbranchが消えるところを$G_2$が解を持たないところで予測する。

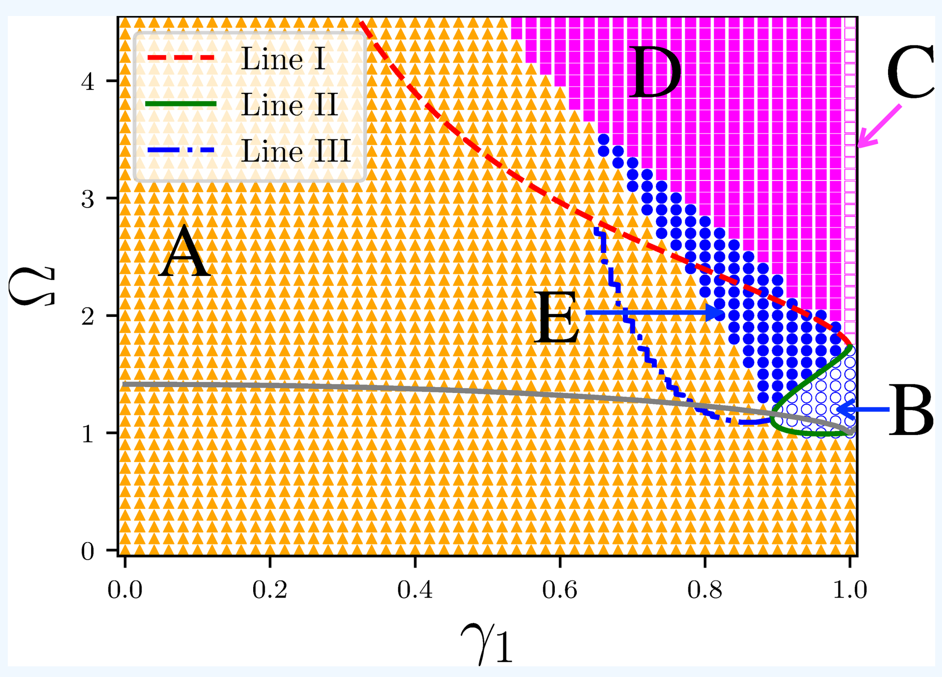
振動

2つのクラスターが発生することが振動が起きることに対応することがわかる。また、2つ目のクラスターが発生するメカニズムを、**2つ目の不安定固有値が発生するかどうか**で考える。これは、$K = K_c$から2つ目の不安定固有値が発生する場合には正しいことが示される。



上の図はそれぞれ$(\gamma_1, \Omega)(1.0, 3.0), (0.8, 3.0)$でのクラスターの成長の様子を表したものである。$(0.8, 3.0)$の場合でも2つ目の不安定固有値の発生に対応して、2つ目のクラスターが発生していることを確認できる。

理論結果と結論



$\gamma_1 = 1$の近くでは線Iは数値計算と一致していることが確かめられる。しかし、第2不安定固有値が出てきたときに常に第2のクラスターが生じるわけではない。その結果振動領域が大きく大きく推定されているのである。線IIは数値計算結果と完全に一致している。線IIIは数値計算結果と一致はしていないが、定性的には部分同期状態からの不連続転移を捉えている。非同期状態から振幅方程式で議論したため、線II近辺では一致していることがわかる。
今後の研究として、蔵本モデルの結合関数が複雑になると、さらに複雑な分岐図が得られることが知られている。そのような分岐図をどのように理論解析できるのか、ということが挙げられる。また振動領域で発生した**Bellerophon states**のメカニズムの解明を考えることも挙げられる。

参考文献

Hayato Chiba.
A proof of the Kuramoto conjecture for a bifurcation structure of the infinite-dimensional Kuramoto model.
Ergodic Theory and Dynamical Systems, Vol. 35, No. 3, pp. 762–834, May 2015.

Erik Andreas Martens, E Barreto, S H Strogatz, E Ott, P So, and T M Antonsen.
Exact results for the Kuramoto model with a bimodal frequency distribution.
Physical Review E, Vol. 79, No. 2, p. 26204, 2009.

Yu Terada, Keigo Ito, Toshio Aoyagi, and Yoshiyuki Y Yamaguchi.
Nonstandard transitions in the Kuramoto model: a role of asymmetry in natural frequency distributions.
Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, Vol. 2017, No. 1, p. 13403, 2017.