2018年1月5日

蔵本モデルにおける振幅方程式と分岐図

米田亮介

京都大学工学部情報学科数理工学コース力学系数理分野4回生

目次

1. 蔵本モデル
2. 分岐図
3. 相図

蔵本モデル

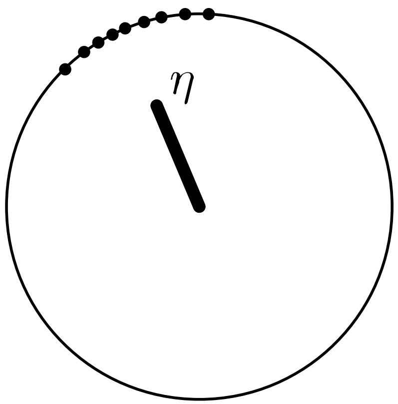
$$\frac{d\theta_i}{dt} = \underbrace{\omega_i}_{\text{自然振動数}} + \underbrace{\frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i)}_{\text{相互作用項}},\ \ i = 1, \cdots, N.$$

- ω_i : $g(\omega)$ に従う.
- K : 結合強度

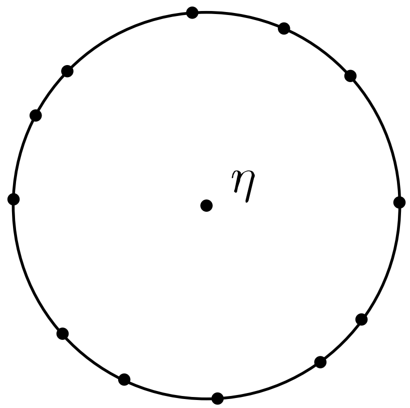
秩序変数

$$\eta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e^{i\theta_i} =: re^{i\psi}.$$

振動子の重心を表す．同期の強さを表す．



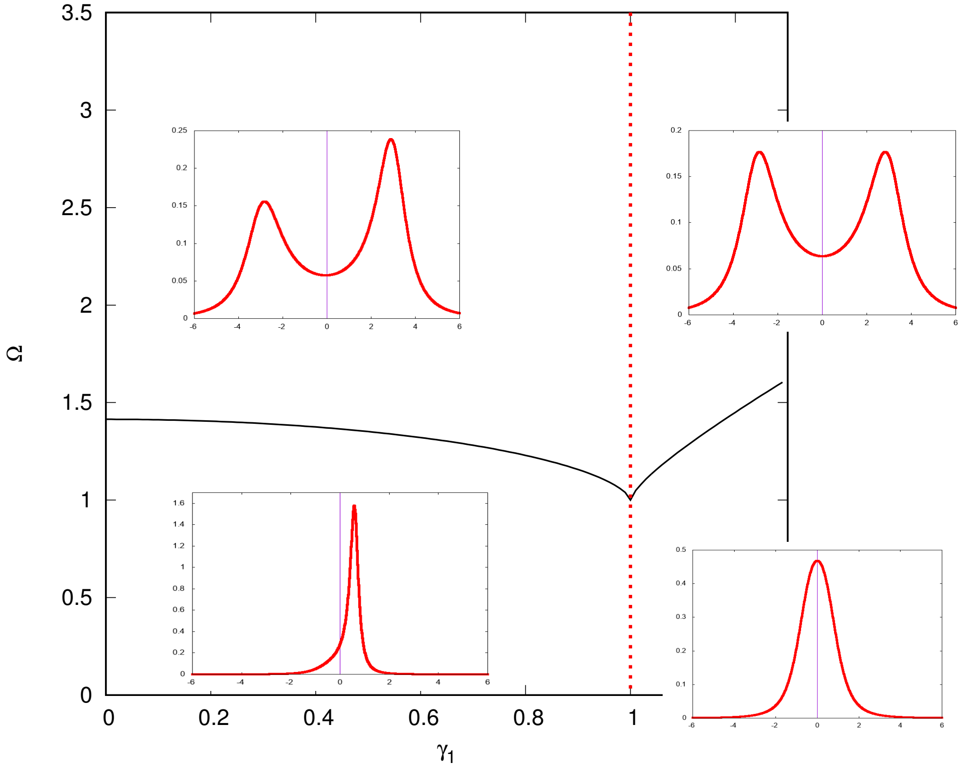
(部分)同期状態



非同期状態$(\eta = 0)$

確率密度関数$g(\omega)$

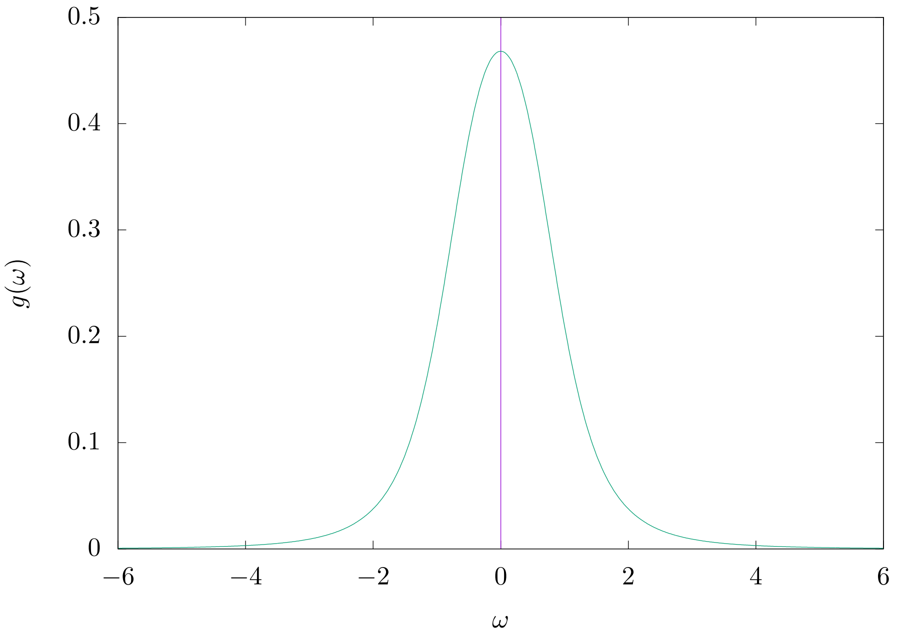
$$g(\omega) = \frac{C}{\left[(\omega-\Omega)^2+\gamma_1^2\right]\left[(\omega+\Omega)^2+\gamma_2^2\right]}.$$

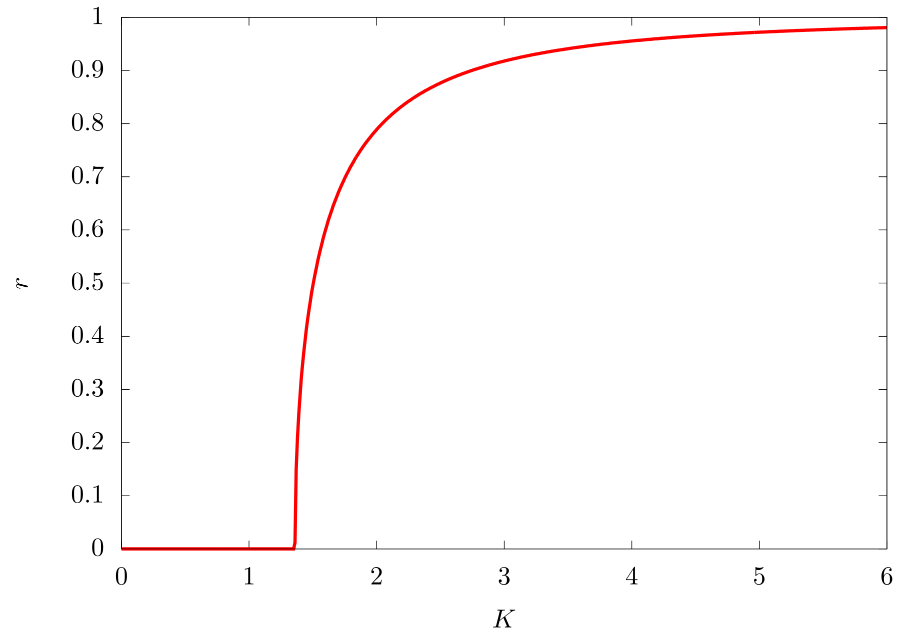


目次

分岐図

$g(\omega)$ が一山対称のときには $r = 0$ から連続的に転移が起きることが知られている.

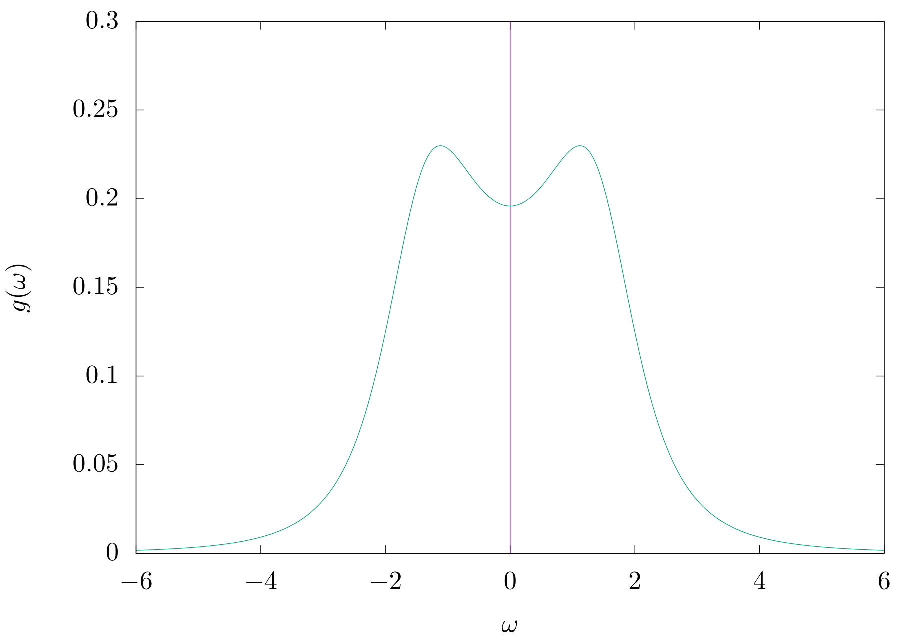


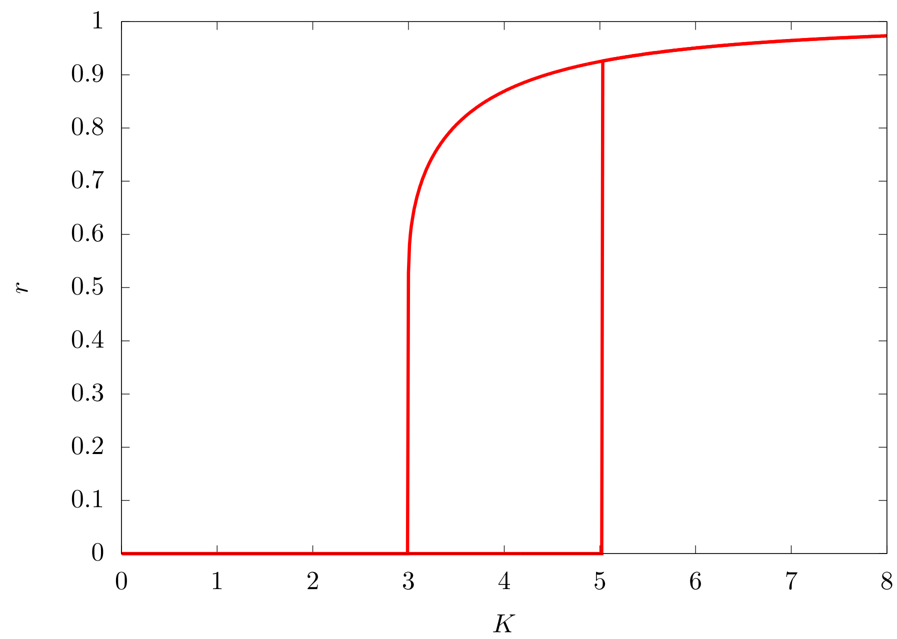


分岐図

$r = 0$から不連続な転移が起きる分岐図

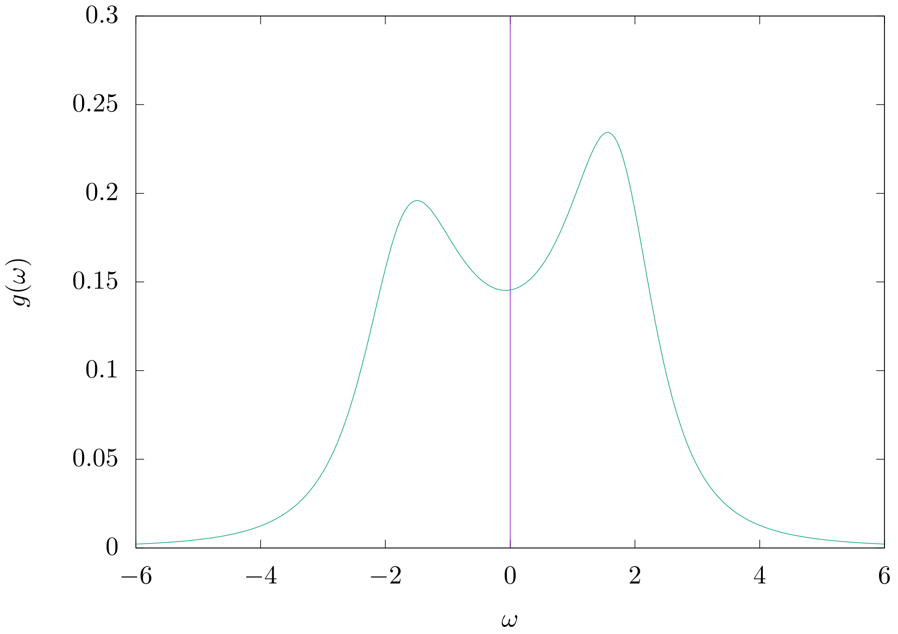
ヒステリシスが起きる.

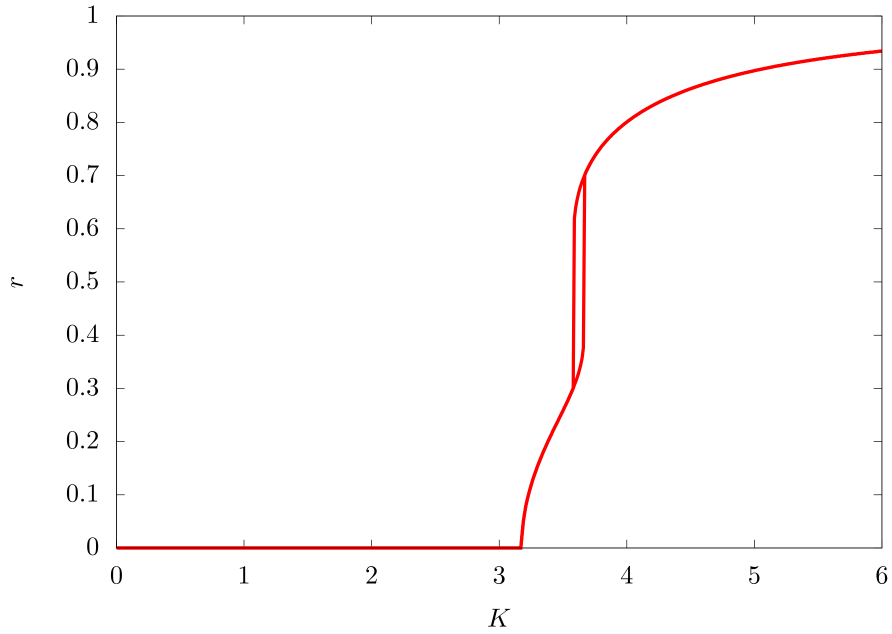




分岐図

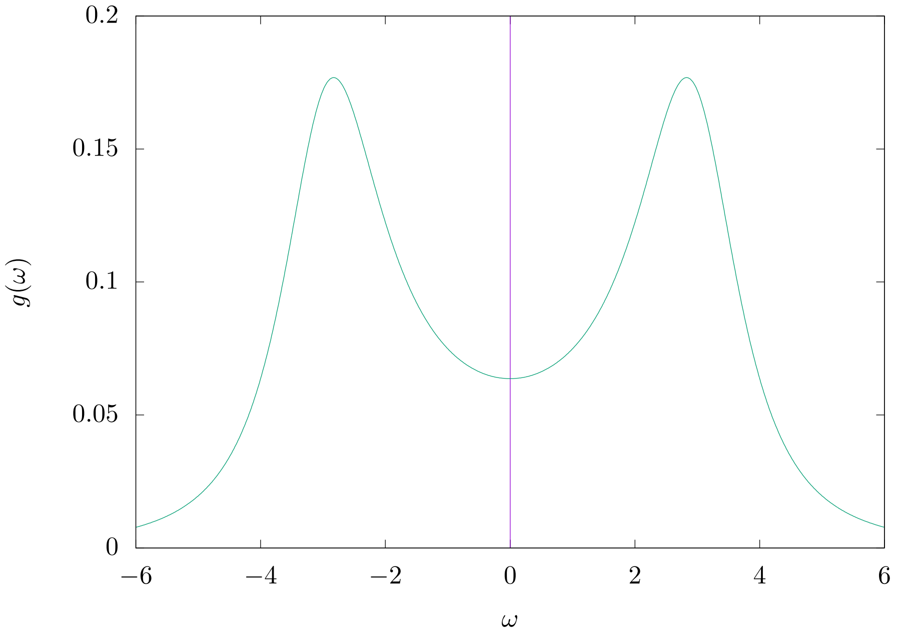
$r > 0$から不連続な転移が起きる分岐図

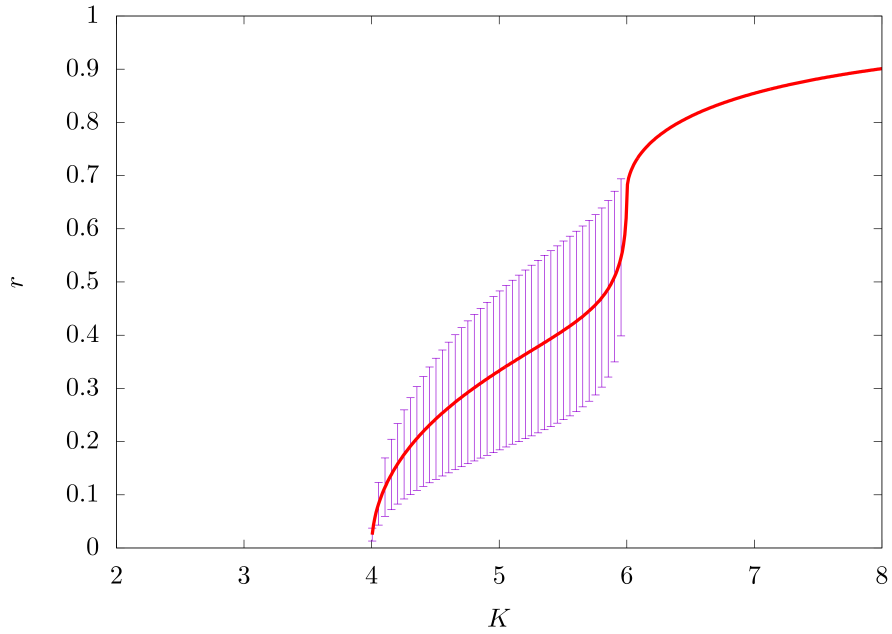




分岐図

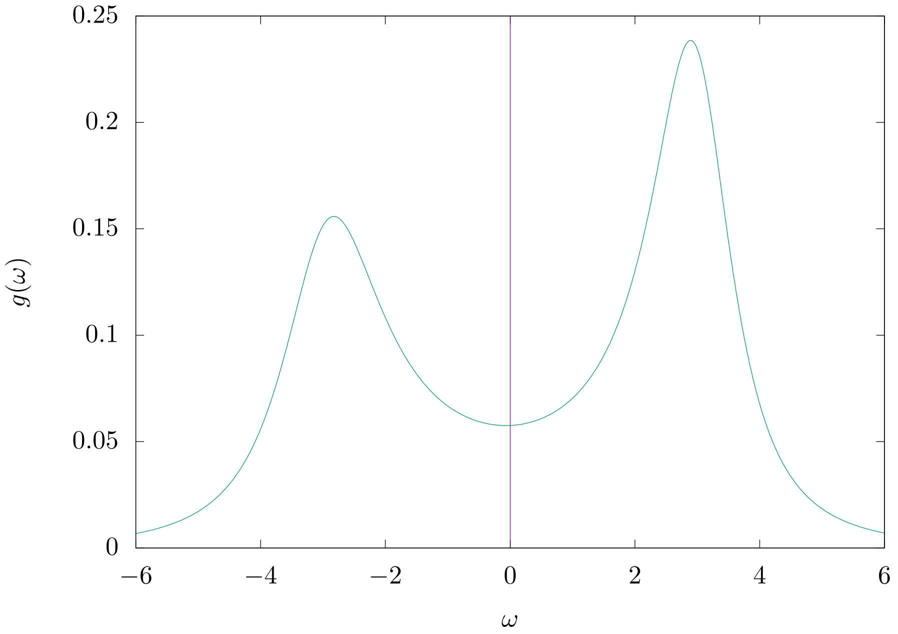
$r = 0$ から振動する転移が起きる分岐図

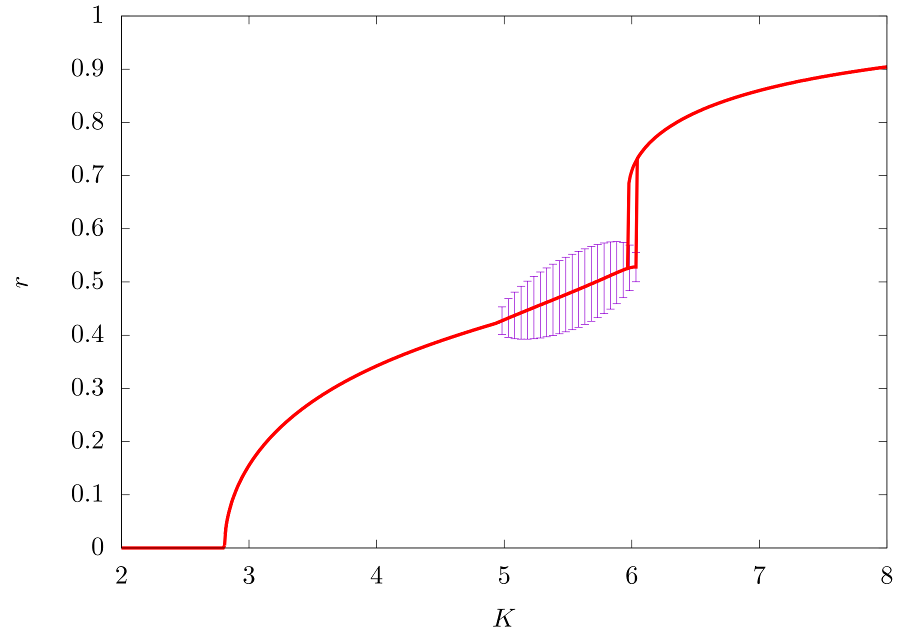




分岐図

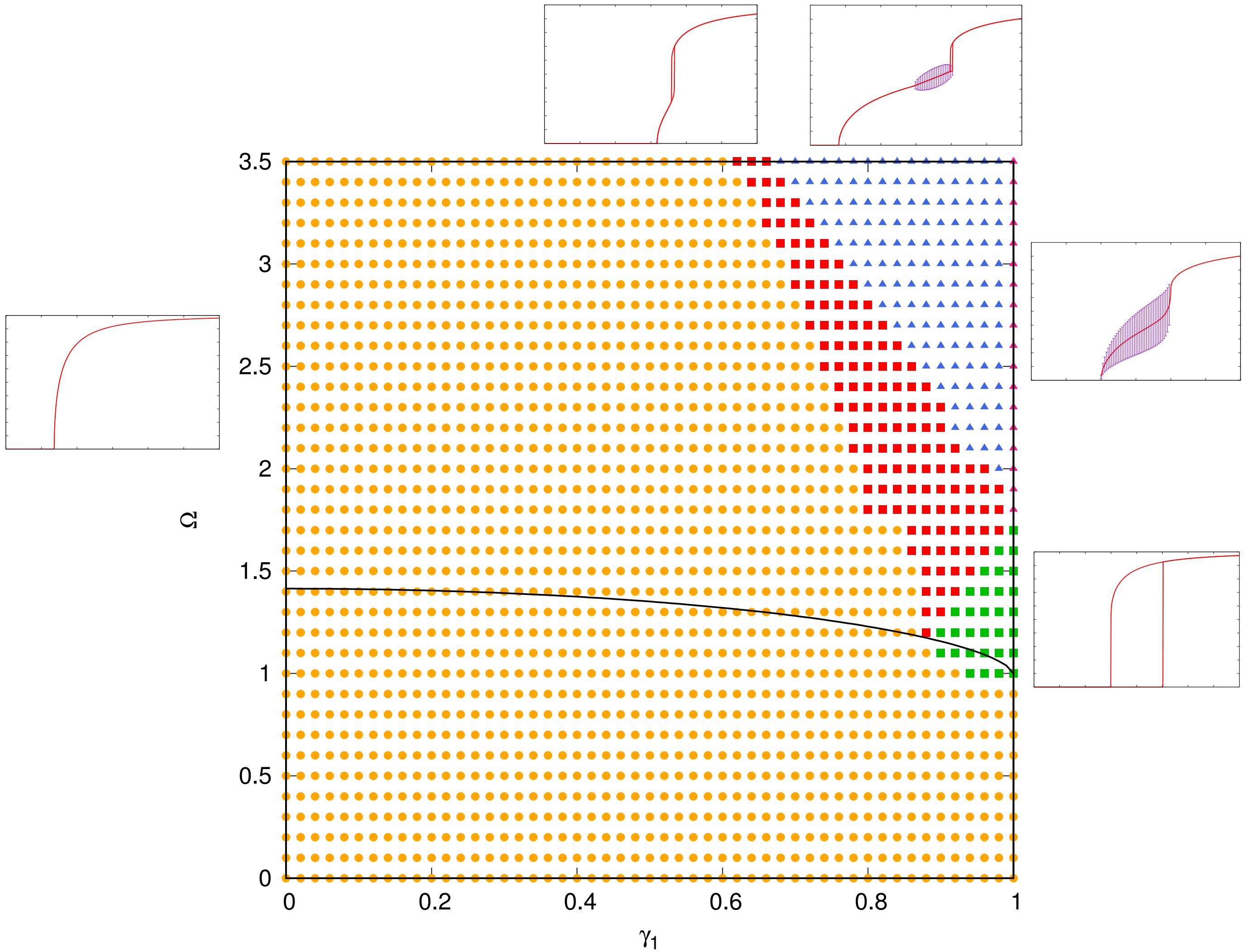
$r > 0$ から振動する転移が起きる分岐図



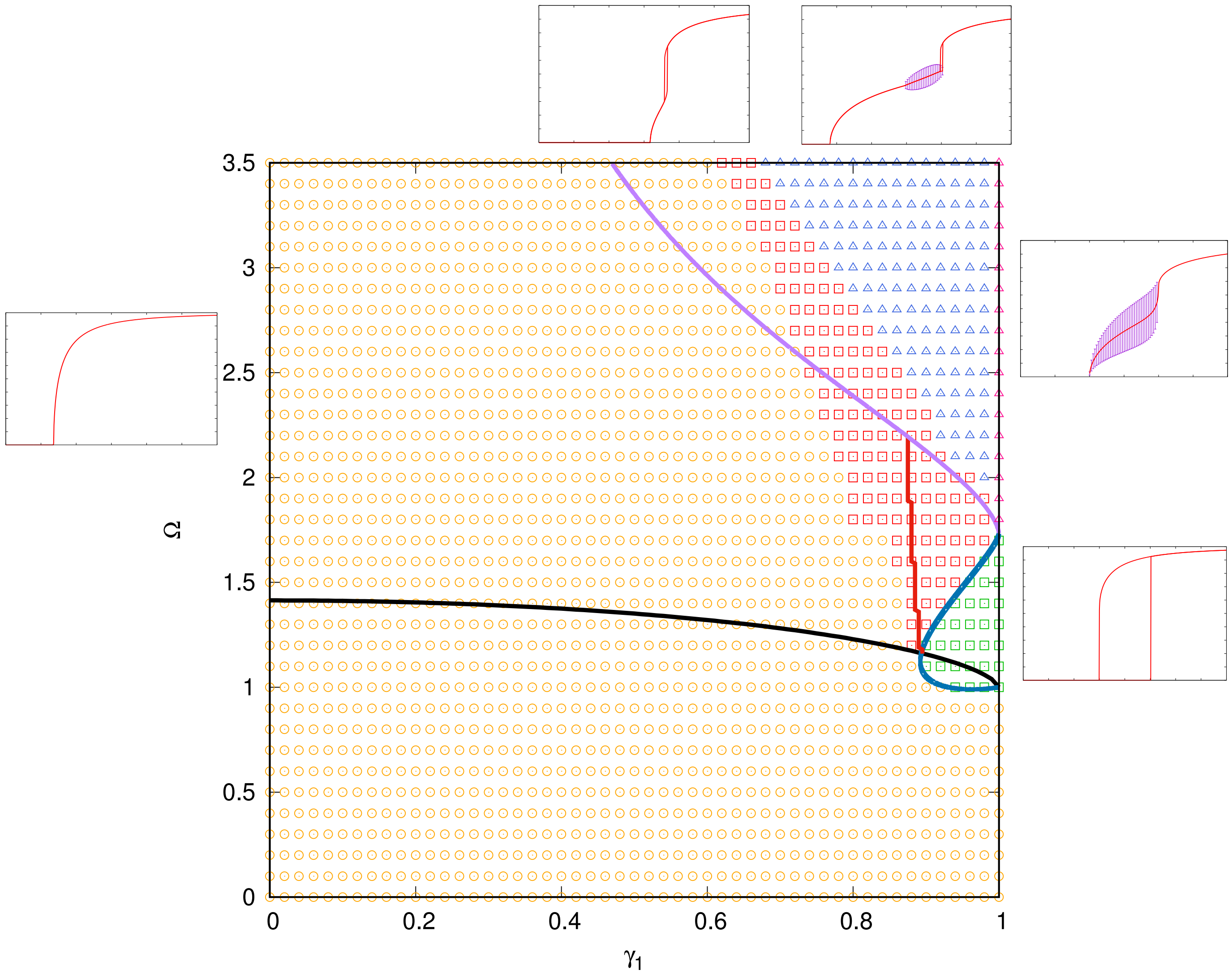


目次

相図 (数値計算)



相図 (理論)



連続の式(Sakaguchi, 1988)

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i),\ \ i = 1, \cdots, N.$$

$$\xrightarrow{(N\to\infty)} \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta}(vF) = 0, \\ v = \omega + K\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta', \omega', t)\sin(\theta' - \theta)d\theta' d\omega', \\ \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta, \omega, t)d\theta = g(\omega). \end{cases}$$

- $F(\Theta, \Omega, t)d\theta d\omega$ は時刻 t において自然振動数 $\Omega \leq \omega \leq \Omega + d\omega$ を持つ振動子が位相 $\Theta \leq \theta \leq \Theta + d\theta$ にいる確率を表す.

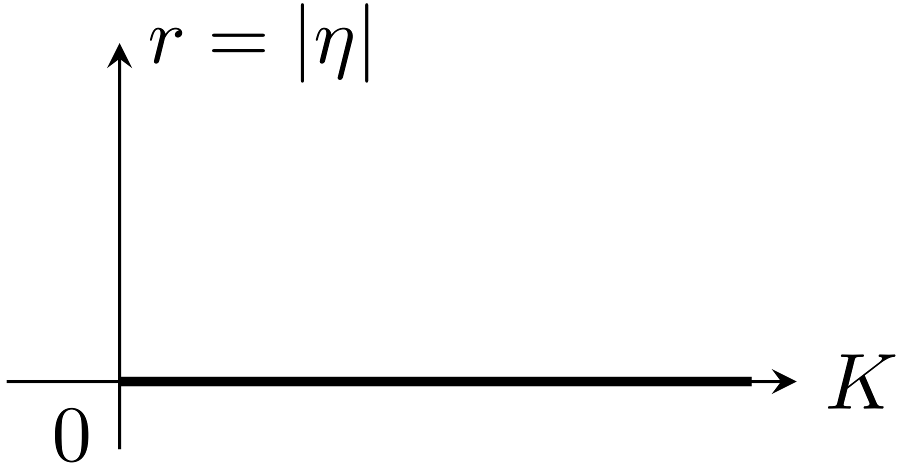
定常解

S^1 上に一様分布する定常解

$$F = f^0 = \frac{g(\omega)}{2\pi}.$$

このとき $\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f^0 e^{i\theta} d\theta d\omega = 0$ で K の値によらずに

非同期

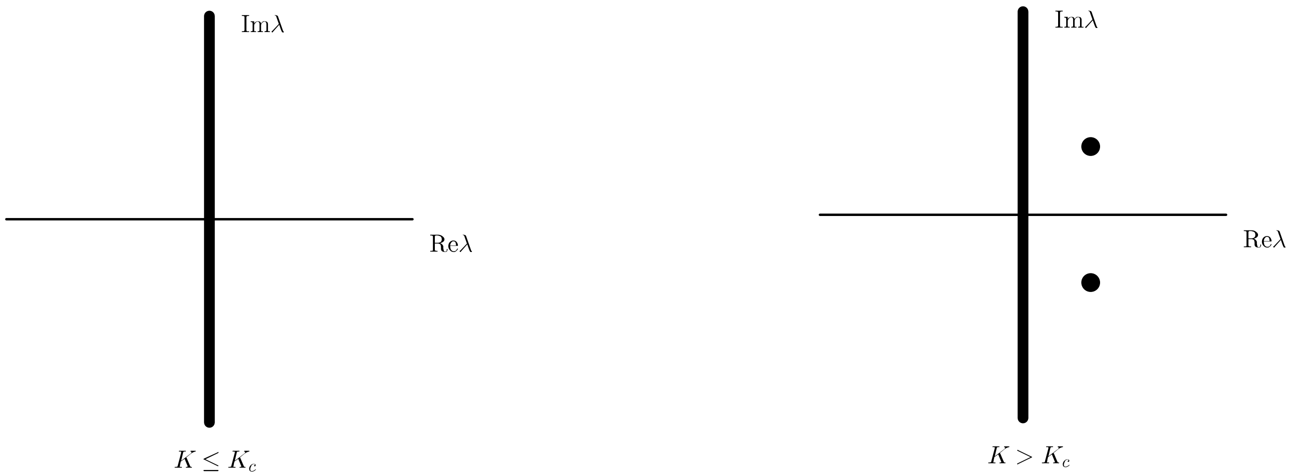


振幅方程式

$F = f^0 + f$ とし f^0 まわりで連続の式を線形部分, 非線形部分に分ける.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathscr{L} f + \mathscr{N} f.$$

$\mathscr{L}$ のスペクトルは K に依存して次のように変化する.



振幅方程式

逓減摂動法を用いると振幅方程式が得られる.

$$\dot{r} = \lambda r + 2\pi c_3 r^3 + O(r^5)$$

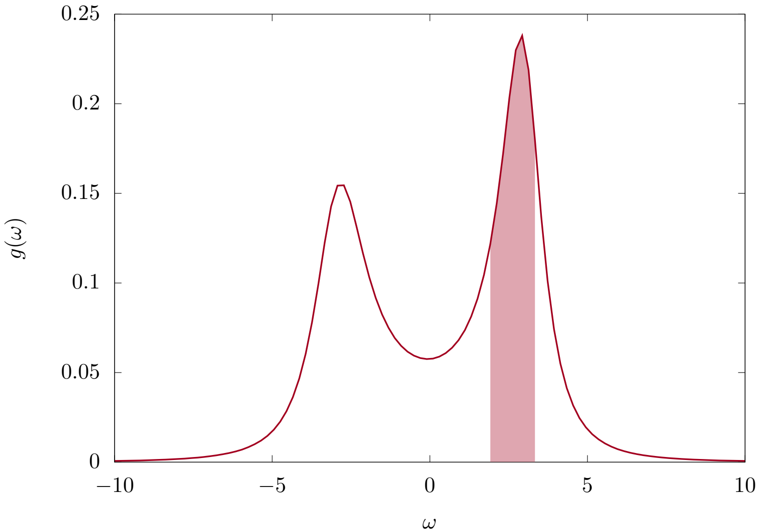
振幅方程式を係数の実部と虚部に分けて書く.

$$\dot{r} = (\mathrm{Re}\lambda + 2\pi \mathrm{Re} c_3 r^2) r + i(\mathrm{Im}\lambda + 2\pi \mathrm{Im} c_3 r^2) r.$$

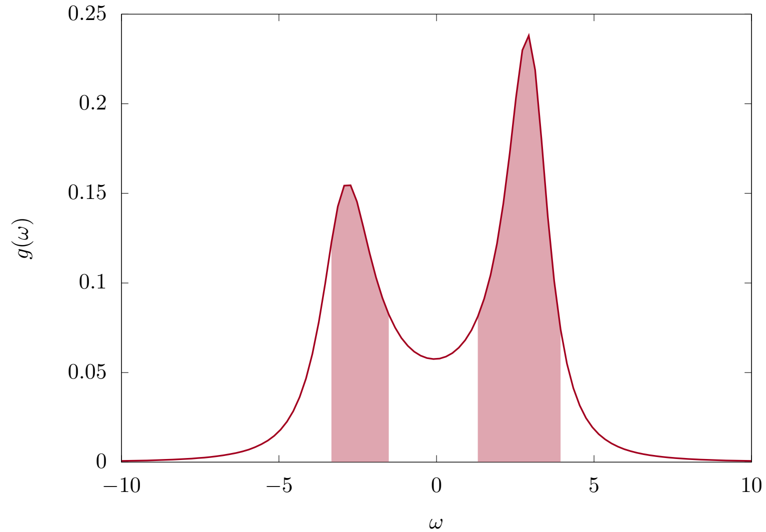
Barrè & Métivier(2016) によると, $K = K_c$ において

- $\mathrm{Re}\ c_3 < 0$:連続転移
- $\mathrm{Re}\ c_3 > 0$:不連続転移

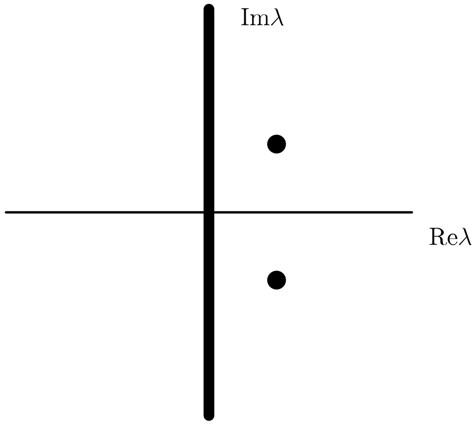
固有値と同期



0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
$g(\omega)$
-10
-5
0
5
10
ω

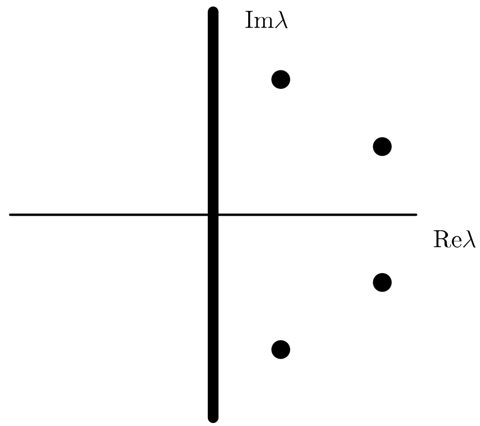


0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
$g(\omega)$
-10
-5
0
5
10
ω



$\mathrm{Im}\lambda$
$\mathrm{Re}\lambda$

$K > K_c$



$\mathrm{Im}\lambda$
$\mathrm{Re}\lambda$