蔵本モデルと同期現象

米田亮介

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻力学系数理分野

yonedaryosuke@amp.i.kyoto-u.ac.jp

学生力学系の会
2018 年 10 月 13 日 (土)～2018 年 10 月 14 日 (日)

目次

同期現象

- 振り子時計
- ホタルの発光
- メトロノーム
- 哺乳類の概日リズム
- 心拍
- ...

蔵本モデル

蔵本モデル

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \cdots, N$$

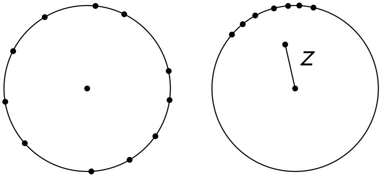
- θ_i: i 番目の振動子の位相
- ω_i: i 番目の振動子の自然振動数。$g(\omega)$ に従う。
- K: 結合定数

秩序変数

秩序変数

$$z = re^{i\psi} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j}$$

- $r \sim 0$: 非同期状態
- $r \sim 1$: (部分) 同期状態



連続の式

連続の式

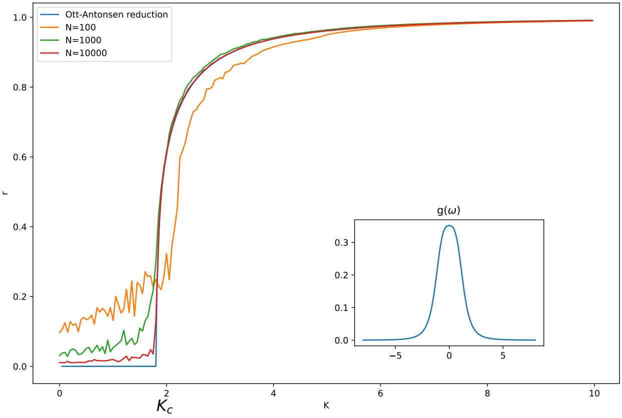
$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta}(vF) = 0,$$
$$v = \omega + K \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta', \omega', t) \sin(\theta' - \theta) d\theta' d\omega'$$

- $F(\theta, \omega, t)$: 時刻 t における θ, ω の確率密度関数
- 非同期の定常解

$$f^0(\omega) = \frac{g(\omega)}{2\pi}$$

分岐図

- $g(\omega)$ が一山対称の場合



自己無矛盾方程式

$g(\omega)$ が一山対称の場合

自己無矛盾方程式

$$r = Kr\int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(Kr\sin\theta)\cos^2\theta d\theta$$

$K \to K_c + 0$ で $r \to 0$ より、

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)}$$

ローレンツ分布

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2}$$

の場合

$$r = \begin{cases} 0 & \text{for all } K \\ \sqrt{1 - \frac{K_c}{K}} & K \geqslant K_c \end{cases}$$

Ott–Antonsen 仮説

$$F(\theta, \omega, t) = \frac{g(\omega)}{2\pi}\left[1 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} a(\omega, t)^k e^{ik\theta} + \mathrm{c.c.}\right)\right]$$

- 上のような性質を課しても系の集団的性質は変わらない!!!
- (周期外力付き) 蔵本モデルのみにしか適用できない。

ローレンツ分布

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2}$$

の場合

- r に関する微分方程式

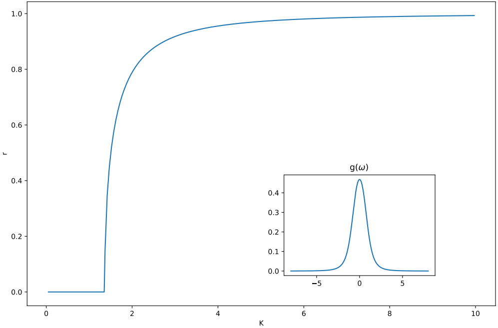
$$\frac{dr}{dt} = \left(\frac{K}{2} - \gamma \right) r - \frac{K}{2} r^3$$

が得られる

中心 (不安定) 多様体縮約

f^0 $(r=0)$ の安定性

- $K < K_{\mathrm{c}}$: 安定
- $K \geqslant K_{\mathrm{c}}$: 不安定



- 連続の式を f^0 周りで $F = f^0 + f$ で展開

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{L} f + \mathcal{N} f$$

- f を不安定多様体に制限 (**無限次元**の偏微分方程式が**有限次元**の微分方程式に落ちる!!)
- 有限次元の微分方程式を用いて分岐の解析ができる。
- 蔵本モデル以外にも様々なモデルに用いることができる!!!

$g(\omega)$ の非対称性

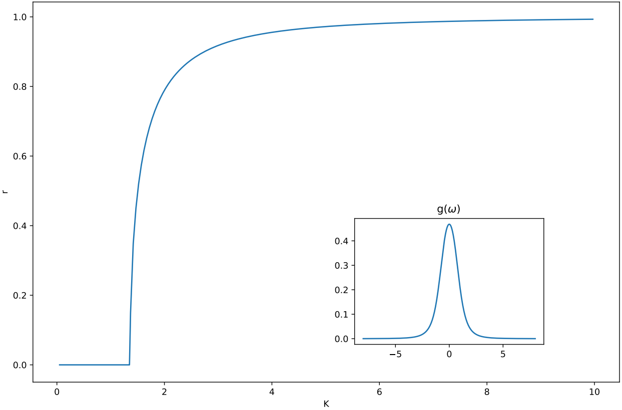
- $g(\omega)$ に非対称性を導入すると、分岐図はどうなるか??

$$g(\omega) = \frac{C}{[(\omega-\Omega)^2+\gamma_1^2]\,[(\omega+\Omega)^2+\gamma_2^2]}$$

$$C = \frac{\gamma_1\gamma_2[(\gamma_1+\gamma_2)^2+4\Omega^2]}{\pi(\gamma_1+\gamma_2)}$$

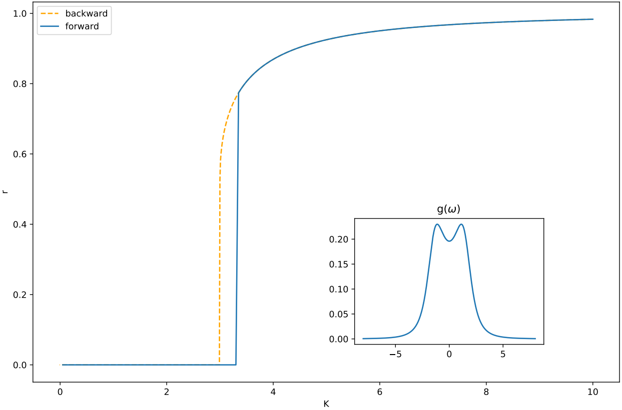
分岐図 (a)

$\underline{\gamma_1 = \gamma_2 = 1.0, \Omega = 0.6}$



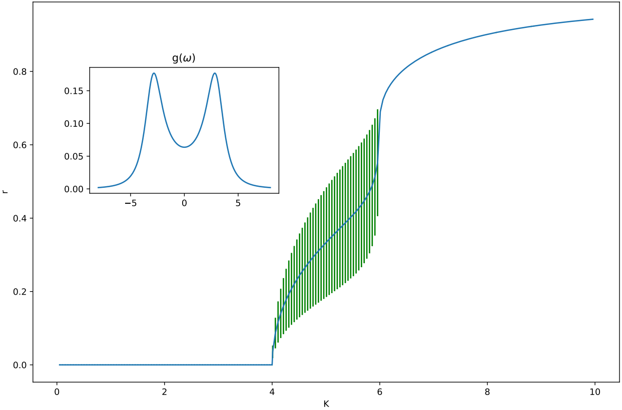
分岐図 (b)

$\gamma_1 = \gamma_2 = 1.0, \Omega = 1.5$



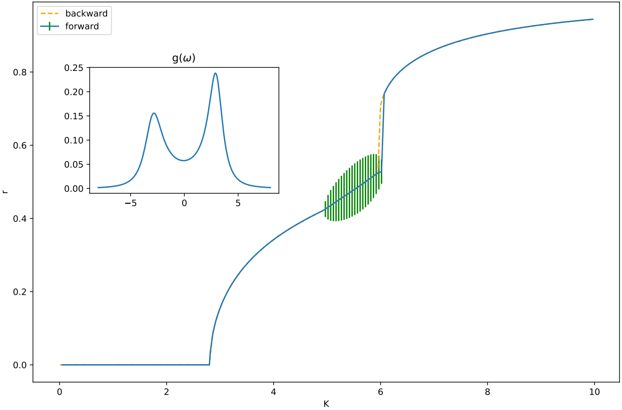
分岐図 (c)

$\gamma_1 = \gamma_2 = 1.0, \Omega = 3.0$



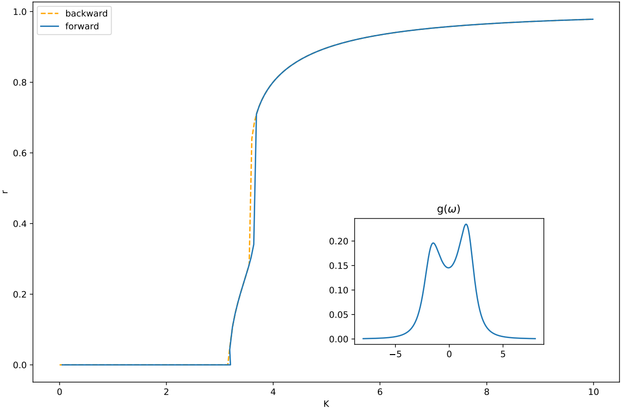
分岐図 (d)

$\gamma_1 = 1.0, \gamma_2 = 0.8, \Omega = 3.0$

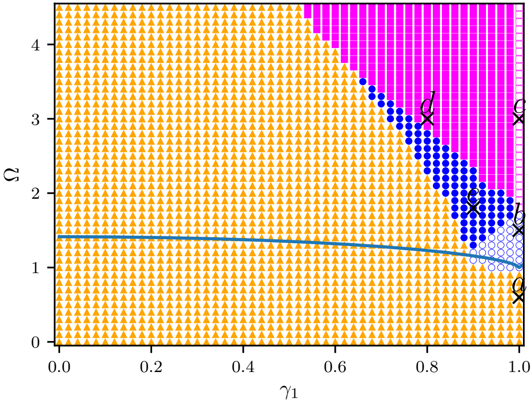


分岐図 (e)

$\gamma_1 = 1.0, \gamma_2 = 0.9, \Omega = 1.8$



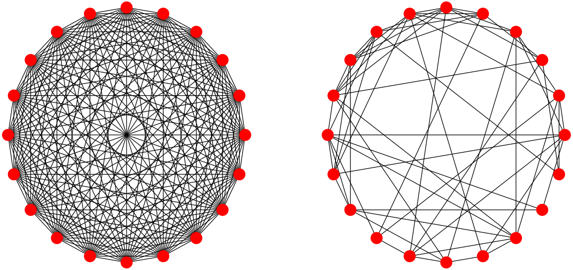
$g(\omega)$ のパラメーター空間 (γ_1, Ω)



- 数値計算を用いて分割された (γ_1, Ω) を理論予測したい!!

ネットワーク上の蔵本モデル

- 蔵本モデルの結合関数を全結合から**複雑ネットワーク**などに変えたときに何が起きるのか??



参考文献リスト

レビュー論文, 本

- Strogatz, S. H. (2000). From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. Physica D: Nonlinear Phenomena, 143(1-4), 1-20.
- Kuramoto, Y. (2012). Chemical oscillations, waves, and turbulence (Vol. 19). Springer Science & Business Media.
- 蔵本由紀, & 河村洋史. (2017). 同期現象の科学: 位相記述によるアプローチ. 京都大学学術出版会.

Ott–Antonsen 仮説

- Ott, E., & Antonsen, T. M. (2008). Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 18(3), 037113.
- Ott, E., & Antonsen, T. M. (2009). Long time evolution of phase oscillator systems. Chaos: An interdisciplinary journal of nonlinear science, 19(2), 023117.

中心多様体縮約を用いた蔵本モデルの解析

- Crawford, J. D. (1994). Amplitude expansions for instabilities in populations of globally-coupled oscillators. Journal of statistical physics, 74(5-6), 1047-1084.
- Chiba, H. (2015). A proof of the Kuramoto conjecture for a bifurcation structure of the infinite-dimensional Kuramoto model. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 35(3), 762-834.

$g(\omega)$ を一山対称以外にも拡張して解析した論文

- Martens, E. A., Barreto, E., Strogatz, S. H., Ott, E., So, P., & Antonsen, T. M. (2009). Exact results for the Kuramoto model with a bimodal frequency distribution. Physical Review E, 79(2), 026204.
- Terada, Y., Ito, K., Aoyagi, T., & Yamaguchi, Y. Y. (2017). Nonstandard transitions in the Kuramoto model: a role of asymmetry in natural frequency distributions. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 2017(1), 013403.
- Yoneda, R., & Yamaguchi, Y. Y. Classification of bifurcations diagrams in the Kuramoto model with asymmetric natural frequency distributions. Manuscript in preparation.