蔵本モデルにおける臨界指数

米田亮介

京都大学大学院情報学研究科

2019/12/09

蔵本モデル

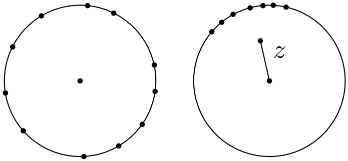
蔵本モデル

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i),\ \ i = 1, \cdots, N$$

- $\theta_i \in [0, 2\pi)$: i 番目の振動子の位相
- ω_i: 分布 $g(\omega)$ からランダムに選んだ自然振動数
- K: 結合定数

秩序変数

$$z = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j} =: re^{i\psi}$$

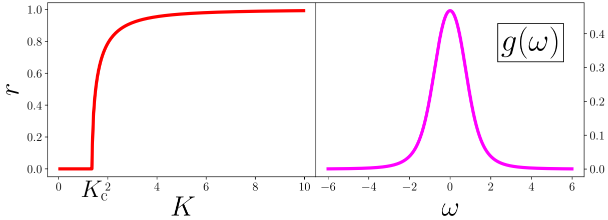


蔵本予想

蔵本予想

$N \to \infty$ を考える。$g(\omega)$ が一山対称のとき、

- $K < K_c := 2/(\pi g(0))$ で $r = 0$ が漸近安定
- $K > K_c$ で $r > 0$ が漸近安定

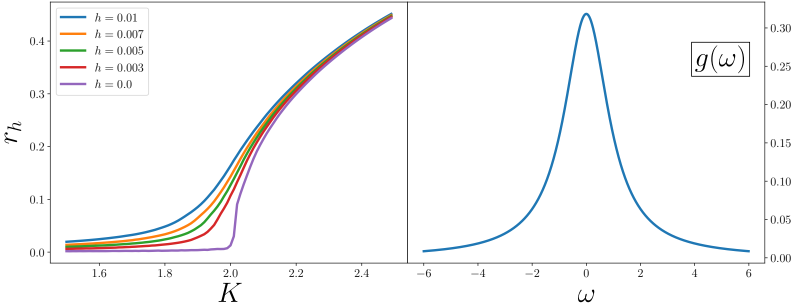


- 千葉によって 2015 年に数学的に証明された。

外力を付け加える

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i) - h\sin\theta_i$$

$g(\omega)$ が Lorentz 分布のときの数値計算結果

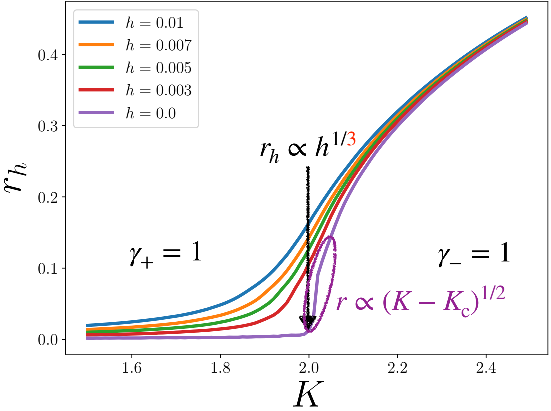


臨界指数

$$r \propto (K - K_\mathrm{c})^{\beta}, \quad K > K_\mathrm{c}$$

$$\chi := \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{d}r_h}{\mathrm{d}h} \propto |K - K_\mathrm{c}|^{-\gamma_\pm}$$

$$r_h \propto h^{1/\delta}, \quad K = K_\mathrm{c}$$



臨界指数

臨界指数

- もともと統計力学で研究されてきたもの
- モデルの詳細には依存せず、普遍的な性質のみに依存すると考えられている。
  - システムの次元
  - 相互作用の範囲

- 臨界現象の背景には何らかの非自明な数理的構造があるとされている。
  - 2 次元 Ising モデルの臨界現象の背景には**共形場理論**と呼ばれる数理的な構造がある。
- $g(\omega) = \dfrac{\Delta}{\pi(\omega^2 + \Delta^2)}$ のとき [Daido 2015]

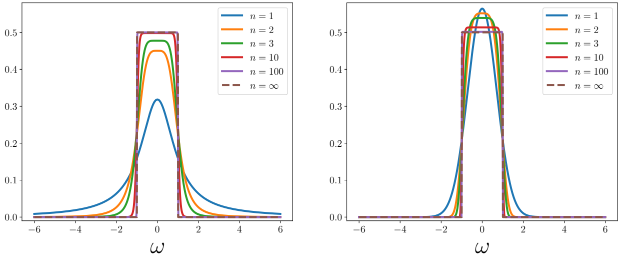
$$\beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 3$$

  - Widom の等式: $\gamma_{\pm} = \beta(\delta - 1)$
- 他の $g(\omega)$ のときは？？

自然振動数分布の族

$$g_n^{(L)}(\omega) = \frac{n\sin(\pi/2n)}{\pi}\frac{\Delta^{2n-1}}{\omega^{2n}+\Delta^{2n}}$$

$$g_n^{(G)}(\omega) = \frac{n\Delta}{\Gamma(1/2n)}e^{-(\Delta\omega)^{2n}}$$



- Lorentz 分布と Gauss 分布の一般化
- $\omega = 0$ まわりの展開

$$g_n(\omega) = g_n(0) - C_n\omega^{\color{red}{2n}} + \cdots$$

自己無矛盾方程式

$g(\omega)$: 一山対称

自己無矛盾方程式

$$r_h = (Kr_h + h)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta g((Kr_h + h)\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$h = 0$ のとき

$$r = Kr\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta g(Kr\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

- 蔵本による直観的な説明を紹介する [Kuramoto 1975]。

自己無矛盾方程式の導出 (1)

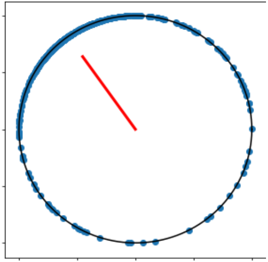
- 蔵本モデルを秩序変数を用いて変形すると

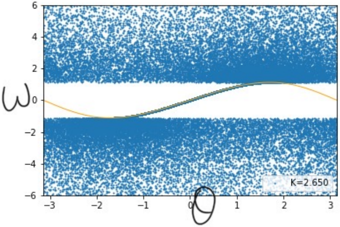
$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr\sin\theta_i$$

- $|\omega_i| \leq Kr$ のとき

$$\omega_i = Kr\sin\theta_i,\ |\theta_i| \leq \frac{\pi}{2}$$

が安定な定常解。





自己無矛盾方程式の導出 (1)

- 蔵本モデルを秩序変数を用いて変形すると

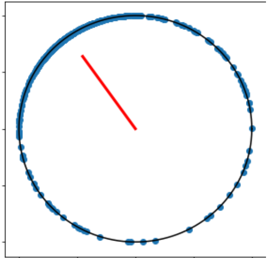
$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr\sin\theta_i$$

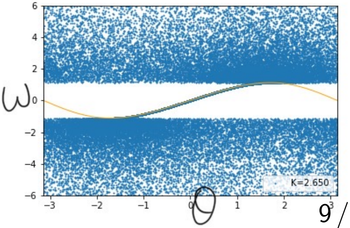
- $|\omega_i| > Kr$ のとき
  自然振動数が ω のときに振動子が $[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta)$ にいる確率を $\rho_{\mathrm{drift}}(\theta \mid \omega)\mathrm{d}\theta$ と書くと、定常性から

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\rho_{\mathrm{drift}}(\theta \mid \omega)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right] = 0$$

  $\int_{\mathbb{S}^1} \rho_{\mathrm{drift}}(\theta \mid \omega)\mathrm{d}\theta = 1$ より

$$\rho_{\mathrm{drift}}(\theta \mid \omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\omega^2 - (Kr)^2}}{|\omega - Kr\sin\theta|}$$





自己無矛盾方程式の導出 (2)

2 つの状態をまとめると

$$r = \int_{|\omega|\le Kr} \mathrm{d}\omega \cos\theta(\omega) g(\omega) + \int_{\mathbb{S}^1} \mathrm{d}\theta \int_{|\omega|>Kr} \mathrm{d}\omega \cos\theta \rho_{\mathrm{drift}}(\theta \mid \omega) g(\omega)$$

$g(-\omega) = g(\omega)$ と $\rho_{\mathrm{drift}}(\theta \mid \omega) = \rho_{\mathrm{drift}}(\theta + \pi \mid -\omega)$ より

$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta g(Kr\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

外力が入った場合も同様にして

$$r_h = (Kr_h + h) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta g((Kr_h + h)\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

が示される。

臨界指数の導出

$r, h \ll 1$ として自己無矛盾方程式を展開すると、

$$r_h = \frac{K}{K_c} r_h - D_n r_h^{2n+1} + \frac{h}{K_c} + \cdots$$

- $h = 0$ のとき

$$(1 - \frac{K}{K_c}) r = -D_n r^{2n+1} + \cdots$$

  より $r \propto (K - K_c)^{1/2n}$

- $K = K_c$ のとき

$$D_n r_h^{2n+1} = \frac{h}{K_c} + \cdots$$

  より $r_h \propto h^{1/2n+1}$

-

$$(1 - \frac{K}{K_c}) \chi = -(2n+1) D_n \chi r^{2n} + \frac{1}{K_c}$$

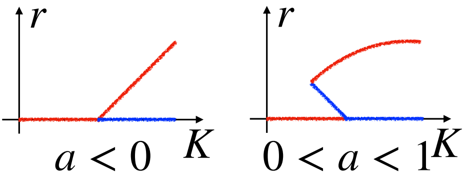
  より $\chi \propto |K - K_c|^{-1}$

model		β	δ	γ_+	γ_-
$\Gamma(\theta) = \sin\theta$	$g(\omega)$: Lorentzian	1/2	3	1	1
	$g_n(\omega)$	$1/2n$	$2n+1$	1	1

- Widom の等式 $\gamma_\pm = \beta(\delta - 1)$ が成り立っている。
- 結合関数を変えると臨界指数は？

$\sin 2\theta$ を付け加える

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}[\sin(\theta_j - \theta_i) + a\sin 2(\theta_j - \theta_i)], \quad a < 0$$



中心多様体縮約を用いて $\beta = 1$ であることが示されている [Crawford 1995,Chiba 2011]。

model		β	δ	γ_+	γ_-
$\Gamma(\theta) = \sin\theta$	$g(\omega)$: Lorentzian	1/2	3	1	1
	$g_n(\omega)$	$1/2n$	$2n+1$	1	1
$\Gamma(\theta) = \sin\theta + a\sin 2\theta$	$g(\omega)$: Lorentzian	1	?	?	?

自己無矛盾方程式

$k = 1, 2$ に対して $r_k = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{ki\theta_j}$ を用いると

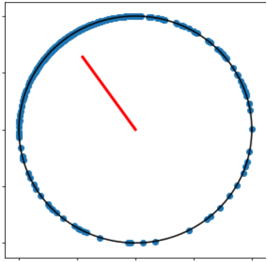
$$\dot{\theta}_i = \omega_i - K(r_1 \sin\theta_i + a r_2 \sin 2\theta_i)$$

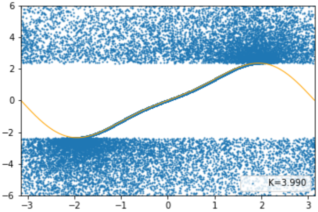
である。$r_* = \max_\theta r_1 \sin\theta + a r_2 \sin 2\theta$ とおく。

- $|\omega_i| \le K r_*$ のとき

$$\omega_i = K(r_1 \sin\theta_i + a r_2 \sin 2\theta_i), \ |\theta_i| \le \theta_*$$

が安定な定常解。





自己無矛盾方程式

$k = 1, 2$ に対して $r_k = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{ki\theta_j}$ を用いると

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - K(r_1 \sin\theta_i + a r_2 \sin 2\theta_i)$$

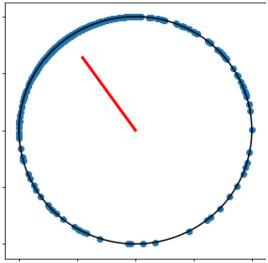
である。$r_* = \max_\theta r_1 \sin\theta + a r_2 \sin 2\theta$ とおく。

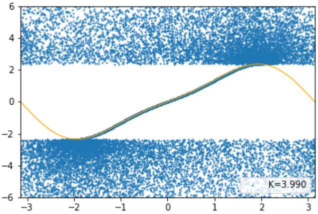
- $|\omega_i| > K r_*$ のとき

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\rho_{\mathrm{drift}}(\theta \mid \omega)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right] = 0$$

規格化定数を $C(r_1, r_2, \omega)$ として

$$\rho_{\mathrm{drift}}(\theta \mid \omega) = \frac{C(r_1, r_2, \omega)}{|\omega - (r_1 \sin\theta + a r_2 \sin 2\theta)|}$$





臨界指数

$$r_k = \int_{|\omega|\le Kr_*} \mathrm{d}\omega \cos k\theta(\omega) g(\omega) + \int_{\mathbb{S}^1} \mathrm{d}\theta \int_{|\omega|>Kr_*} \mathrm{d}\omega \cos k\theta \rho_{\mathrm{drift}}(\theta \mid \omega) g(\omega)$$

- $r_1, r_2 \ll 1$ で展開

$$r_1 = \frac{Kg(0)}{2}(2\theta_* - \sin 2\theta_*)r_1 + \frac{4aKg(0)}{3}\sin^3\theta_* r_2 + \frac{aK^2}{2}Cr_1r_2 + \cdots$$

$$r_2 = \frac{8Kg(0)}{3}\sin^3\theta_* r_1 + \frac{aKg(0)}{2}(4\theta_* - \sin 4\theta_*)r_2 - \frac{K^2}{4}Cr_1^2 + \cdots$$

$$C = \mathcal{PV}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\omega \frac{g'(\omega)}{\omega}$$

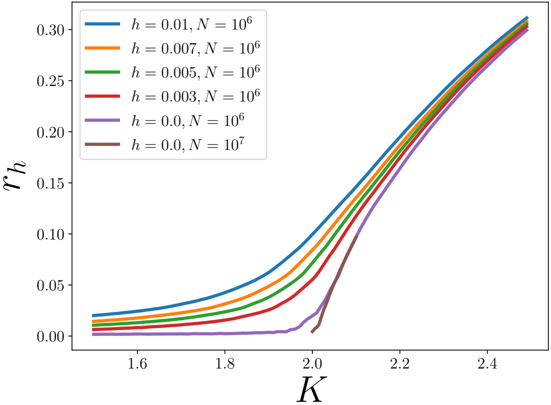
- r_2 を消去

$$r_1 = \frac{2(1-a)}{K_{\mathrm{c}}^3 Ca}(K - K_{\mathrm{c}})^{1} + \cdots$$

- 中心多様体縮約による結果と一致 [Chiba 2011]!！
- $\delta = 2, \quad \gamma_\pm = 1$

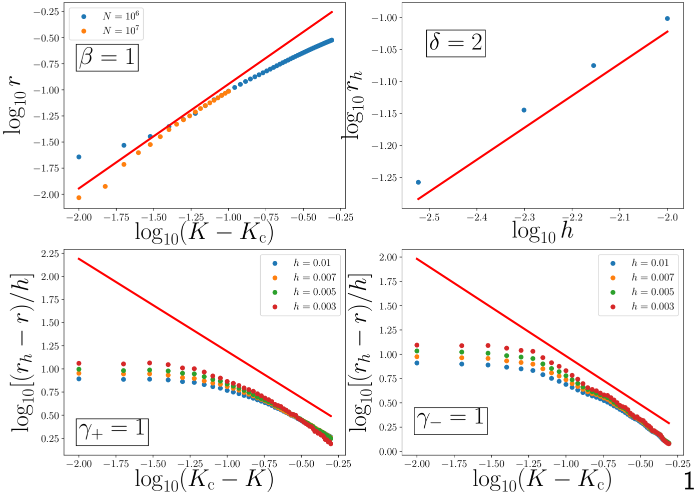
数値計算

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}[\sin(\theta_j - \theta_i) + a\sin 2(\theta_j - \theta_i)] - h\sin\theta_i, \quad a = -0.2$$



数値計算

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}[\sin(\theta_j - \theta_i) + a\sin 2(\theta_j - \theta_i)] - h\sin\theta_i, \quad a = -0.2$$



まとめと展望

Coupled phase-oscillator		β	δ	γ_+	γ_-
$\Gamma(\theta) = \sin\theta$	$g(\omega)$: Lorentzian	1/2	3	1	1
	$g_n(\omega)$	$1/2n$	$2n+1$	1	1
$\Gamma(\theta) = \sin\theta + a\sin 2\theta$	$g(\omega)$: Lorentzian	1	2	1	1

- Widom の等式 $\gamma_\pm = \beta(\delta - 1)$ が成り立っている。
  - 蔵本モデルだと自明？
  - $(1 - K/K_c)r_h = -(r_h)^a + h$ のときに

$$\beta = \frac{1}{a-1}, \quad \delta = a, \quad \gamma_\pm = 1$$

- ネットワーク上の蔵本モデルだと臨界指数は？
- 解析的でない $g(\omega)$ では？？