スモールワールドネットワーク上の蔵本モデルの臨界指数

米田亮介

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻力学系数理分野修士 2 回

2020/01/12

蔵本モデル

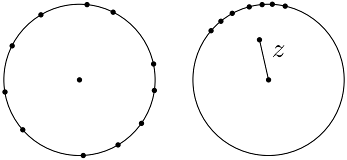
蔵本モデル

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i),\ \ i = 1, \cdots, N$$

- $\theta_i \in [0, 2\pi)$: i 番目の振動子の位相
- ω_i: 分布 $g(\omega)$ からランダムに選んだ自然振動数
- K: 結合定数

秩序変数

$$z = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j} =: re^{i\psi}$$

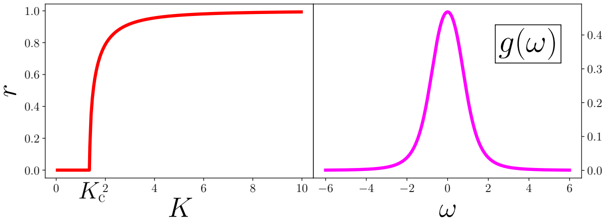


蔵本予想

蔵本予想

$N \to \infty$ を考える。$g(\omega)$ が一山対称のとき、

- $K < K_c := 2/(\pi g(0))$ で $r = 0$ が漸近安定
- $K > K_c$ で $r > 0$ が漸近安定



- 千葉によって数学的に証明された [Chiba 2015]。

臨界指数

- 臨界点 K_c 周りの立ち上がり

$$r \sim (K - K_c)^\beta$$

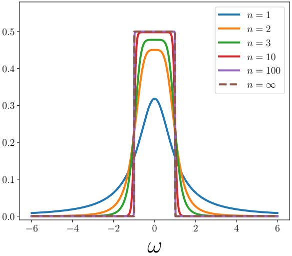
- β: 臨界指数
- $g(\omega) = \dfrac{\Delta}{\pi(\omega^2 + \Delta^2)}$ (**Lorentz 分布**) のとき $K_c = 2\Delta$ として

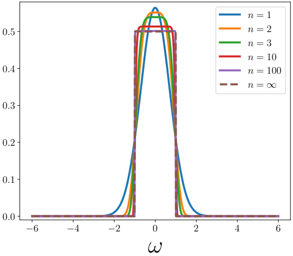
$$r = \sqrt{1 - \frac{K_c}{K}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{2}$$

- 他の $g(\omega)$ のときは？？
- 他の結合関数のときは？？

自然振動数分布の族

$$g_n^{(L)}(\omega) = \frac{n\sin(\pi/2n)}{\pi}\frac{\Delta^{2n-1}}{\omega^{2n}+\Delta^{2n}}$$
$$g_n^{(G)}(\omega) = \frac{n\Delta}{\Gamma(1/2n)}e^{-(\Delta\omega)^{2n}}$$





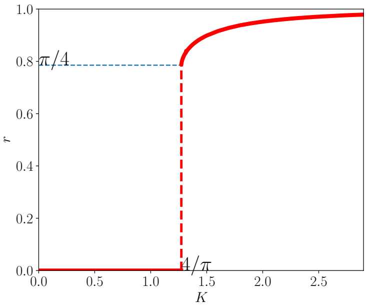
- Lorentz 分布と Gauss 分布の一般化
- $\omega = 0$ まわりの展開

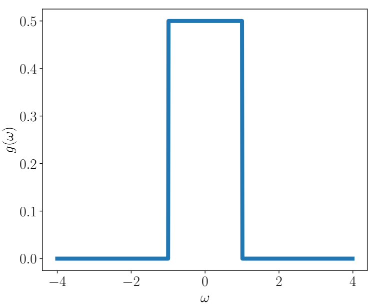
$$g_n(\omega) = g_n(0) - C_n\omega^{2n} + \cdots$$

- $\beta = \dfrac{1}{2n}$

$n = \infty$

$$r - r_c \propto (K - K_c)^{2/3}$$

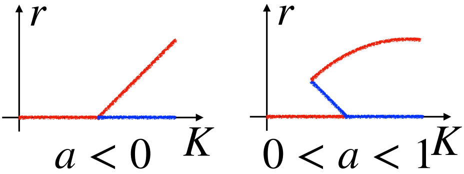




- 臨界点で jump が見られる
- $\beta = \dfrac{2}{3}$

$\sin 2\theta$ を付け加える

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}[\sin(\theta_j - \theta_i) + a\sin 2(\theta_j - \theta_i)]$$



- $a < 0$ で一山対称の $g(\omega)$ のとき

$$\beta = 1$$

臨界指数

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}[\sin(\theta_j - \theta_i) + a\sin 2(\theta_j - \theta_i)]$$

$$g_n(\omega) = g_n(0) - C_n\omega^{2n} + \cdots$$

	all-to-all		
	$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$n = 1$	1	$\frac{1}{2}$	(1st-order)
$n \geq 2$	1	$\frac{1}{2n}$	(1st-order)
$n = \infty$	1	$\left(\frac{2}{3}\right)$	(1st-order)

- 自己無矛盾方程式による導出は蔵本モデルの全結合性に強く依存している
- ネットワーク上だとどうなる？？

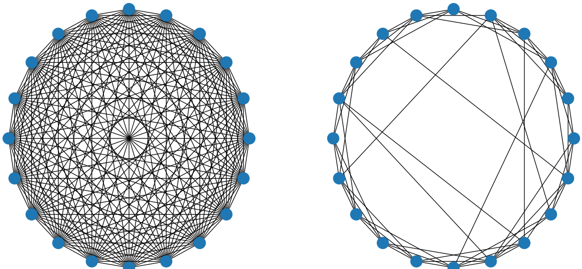
スモールワールドネットワーク

- 現実のネットワークに関する研究
    - “6 次の隔たり”
    - 強いクラスター化

スモールワールド性

- 平均ノード間距離 $\langle l \rangle$ がノード数 N に対して $\langle l \rangle \ll N$
- 平均クラスター係数がノード数 N に依存しない

- **Watts-Strogatz model**: スモールワールド性を記述する代表的なモデル [Watts and Strogatz 1998]
- $O(N)$ 本の枝を持つ (全結合グラフは $O(N^2)$)



スモールワールドネットワーク上の蔵本モデル

スモールワールドネットワーク上の蔵本モデル

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{K}{2k} \sum_{j \in \Lambda_i} \left[\sin(\theta_j - \theta_i) + a \sin 2(\theta_j - \theta_i) \right]$$

- Λ_i: i 番目の振動子に接続する振動子の index 集合。Watts–Strogatz モデルに従って生成したネットワークによって定まる。

- 蔵本モデルがスモールワールドネットワーク上へと移行したときに同期転移が見られるのか？
- 見られるとするとそのときの臨界指数はいくらになるのか？

有限サイズスケーリング

有限サイズスケーリング

$$r = N^{-\beta/\bar{\nu}} F((K - K_{\mathrm{c}})N^{1/\bar{\nu}})$$

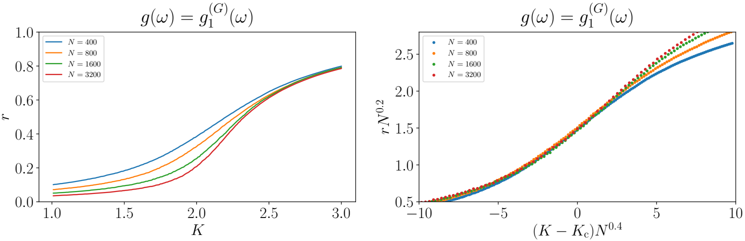
- 臨界点近傍で**スケーリング関数** F に従う、という仮定
- 連続転移を起こす系の臨界点、臨界指数を求めるのに使われる
- 有限サイズ N のときの (r, K) のデータをもとに $K_{\mathrm{c}}, \beta, \bar{\nu}$ を推定していく

数値計算結果

有限サイズスケーリング

$$r = N^{-\beta/\bar{\nu}} F((K - K_{\mathrm{c}}) N^{1/\bar{\nu}})$$

- $a = 0, n = 1$ のとき



$$\frac{\beta}{\bar{\nu}} = 0.2, \quad \frac{1}{\bar{\nu}} = 0.4 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0.5$$

まとめと展望

	all-to-all			small-world		
	$a<0$	$a=0$	$a>0$	$a<0$	$a=0$	$a>0$
$n=1$	1	$\frac{1}{2}$	(1st-order)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$n\geq 2$	1	$\frac{1}{2n}$	(1st-order)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$n=\infty$	1	$\left(\frac{2}{3}\right)$	(1st-order)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

- 全結合とスモールワールドネットワークで β が異なることがわかった。
  - 枝の本数の違い？ ($O(N)$ か $O(N^2)$ かで変わっている？)
  - 枝の本数が $O(N^\alpha), 1<\alpha<2$ だと？？
- 理論的に臨界指数を求めたい。
  - 連続極限をどう取る？？ (graphon を用いた解析はできない)
- 他のネットワークではどうなる？？
  - (スパース) ランダムネットワーク
  - スケールフリーネットワークなどなど