

スモールワールドネットワーク上の結合位相振 動子系における同期転移の臨界指数

京都大学大学院情報学研究科先端数理科学専攻博士 1 回
米田亮介

日本物理学会 2020 年秋季大会
2020/09/09

Joint work with Y. Y. Yamaguchi and K. Harada
arXiv:2007.04539

結合位相振動子系

同期現象を示す代表的なモデル

大域結合位相振動子モデル

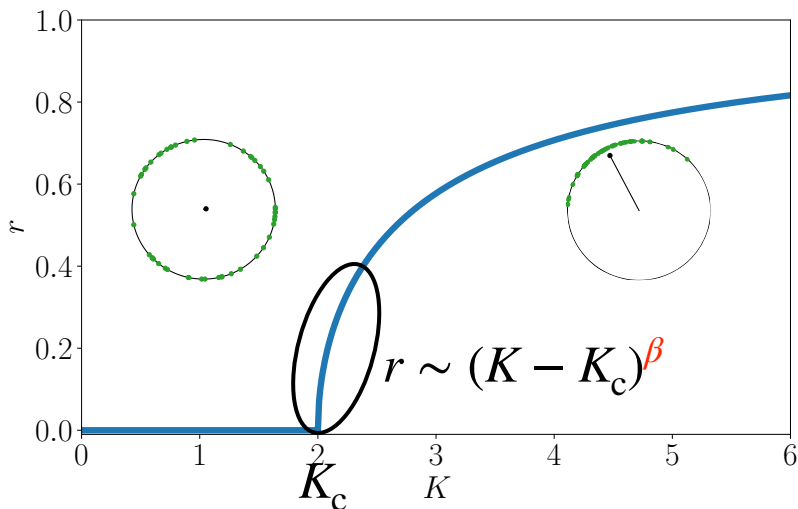
$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N$$

- $\theta_i \in [0, 2\pi)$: i 番目の振動子の位相
- ω_i : 分布 $g(\omega)$ からランダムに選んだ自然振動数
- K : 結合定数
- $\Gamma(\theta)$: 結合関数 (周期 2π)

秩序変数 (同期の強さを表すパラメータ)

$$z = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} =: r e^{i\psi}$$

分岐図と臨界指数

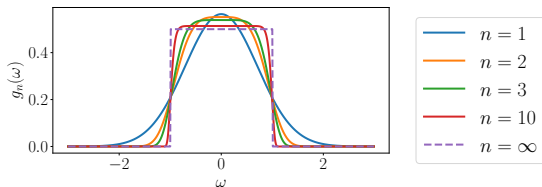


- $N \rightarrow \infty$ での連続転移の臨界点近傍での立ち上がり: 臨界指数 β
 - 臨界指数は統計力学でよく研究されている
 - 分布関数 $g(\omega)$ 、結合関数 $\Gamma(\theta)$ による依存性

臨界指数

$$\Gamma(\theta) = \sin \theta + a \sin 2\theta$$

$$g_n(\omega) = \frac{ne^{-(\omega/\Delta)^{2n}}}{\Gamma(1/2n)\Delta}$$



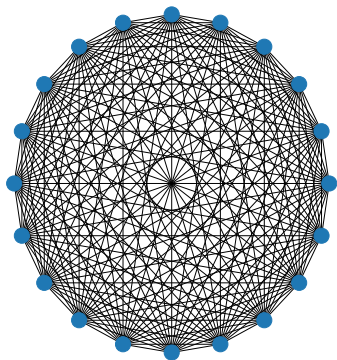
		all-to-all		
		$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$n = 1$	1 (Chiba 2011)		1/2 (Kuramoto 1975)	(不連続) (Chiba 2011)
$n \geq 2$			1/(2n) (Basanarkov 2007)	
$n = \infty$			(不連続) (Pazo 2005)	

- 理論的な導出はモデルの全結合性に強く依存
- ネットワーク上だとどうなる??

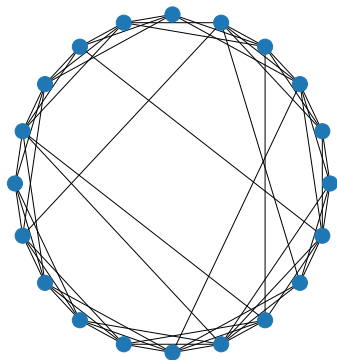
スモールワールドネットワーク

- スモールワールドネットワーク
 - 平均ノード間距離 $\langle l \rangle$ がノード数 N に対して $\langle l \rangle \ll N$
 - 平均クラスター係数がノード数 N に依存しない
- **Watts–Strogatz model**: スモールワールド性を記述する代表的なモデル [Watts and Strogatz, 1998]
 - $O(N)$ 本の枝を持つ (全結合グラフは $O(N^2)$)

全結合



スモールワールドネットワーク



スモールワールドネットワーク上の結合振動子モデル

スモールワールドネットワーク上の結合振動子モデル

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{2k} \sum_{j \in \Lambda_i} [\sin(\theta_j - \theta_i) + a \sin 2(\theta_j - \theta_i)]$$

- Λ_i : i 番目の振動子に接続する振動子の index 集合。Watts–Strogatz モデルに従って生成したネットワークによって定まる。
- k : (ネットワークの平均次数)/2

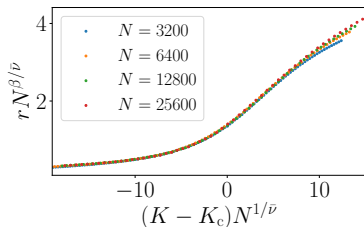
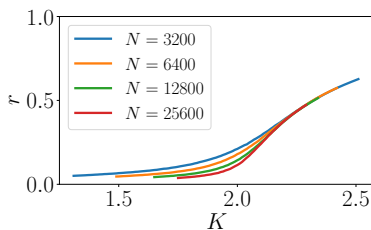
	all-to-all($O(N^2)$)			small-world($O(N)$)		
	$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$n = 1$	1	1/2	(不連続)	?	(1/2) (Hong 2001)	?
$n \geq 2$	1	1/(2n)	(不連続)	?	?	?
$n = \infty$	1	(不連続)	(不連続)	?	?	?

有限サイズスケーリング

有限サイズスケーリング

$$r_N(K)N^{\beta/\bar{\nu}} = F((K - K_c)N^{1/\bar{\nu}})$$

- 連続転移する系が臨界点近傍でスケーリング関数 F に従う、という仮定
- 有限サイズ N のときの $r_N(K)$ のデータをもとに $K_c, \beta, \bar{\nu}$ を推定
 - Bayesian scaling analysis(ガウス過程回帰を用いる) によって推定 [Harada 2011]
- $a = 0, n = 1$



数値計算結果

$$\Gamma(\theta) = \sin \theta + a \sin 2\theta, \quad g_n(\omega) = \frac{ne^{-(\omega/\Delta)^{2n}}}{\Gamma(1/2n)\Delta}$$

- $a = 0, -0.2, 0.5$ と $n = 1, 2, 3, \infty$ でそれぞれ臨界指数 $\beta, \bar{\nu}$ を計算

$\sin \theta + a \sin 2\theta$	$g_n(\omega)$	β	$\bar{\nu}$
$a = 0$	$n = 1$	0.51(4)	2.40(6)
	$n = 2$	0.49(2)	2.43(4)
	$n = 3$	0.47(2)	2.46(4)
	$n = \infty$	0.46(2)	2.46(4)
$a = -0.2$	$n = 1$	0.48(6)	2.36(8)
	$n = 2$	0.51(4)	2.41(6)
	$n = 3$	0.55(4)	2.50(6)
	$n = \infty$	0.49(4)	2.49(6)

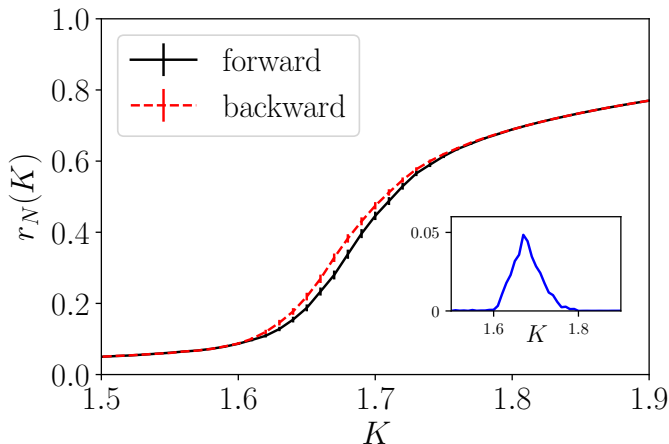
- n によらず

$$\beta \approx \frac{1}{2}, \quad \bar{\nu} \approx \frac{5}{2}$$

- $a = 0.5$ では?

$$a = 0.5$$

- $a = 0.5$ ではヒステリシスが起こることが確認された。
- 不連続転移（1次相転移）が起こることを示唆している。
- $(a, n) = (0.5, 1)$ でシステムサイズ $N = 25600$ におけるヒステリシス



まとめと展望

$$\Gamma(\theta) = \sin \theta + a \sin 2\theta, \quad g_n(\omega) = \frac{n}{\Gamma(1/2n)\Delta} e^{-(\omega/\Delta)^{2n}}$$

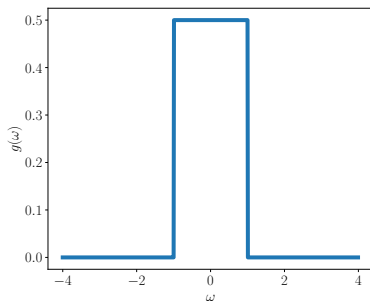
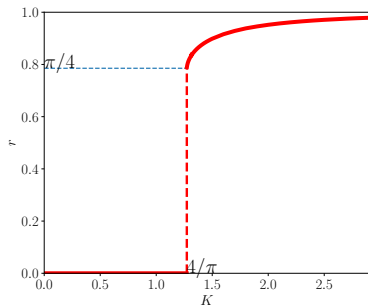
	all-to-all($O(N^2)$)			small-world($O(N)$)		
	$a < 0$	$a = 0$	$0 < a < 1$	$a = -0.2$	$a = 0$	$a = 0.5$
$n = 1$	1	$\frac{1}{2}$	(不連続)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	(不連続)
$n \geq 2$	1	$\frac{1}{2n}$	(不連続)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	(不連続)
$n = \infty$	1	(不連続)	(不連続)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	(不連続)

- 全結合とスモールワールドネットワークで β が異なることがわかった。
 - 枝の本数の違い? ($O(N)$ か $O(N^2)$ かで変わっている?)
 - 枝の本数が $O(N^\alpha)$, $1 < \alpha < 2$ だと??
- 理論的に臨界指数を求めたい。
 - 連続極限をどう取る?? (graphon を用いた解析はできない)

appendix

$$n = \infty$$

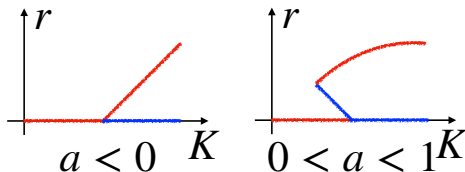
$$r - r_c \propto (K - K_c)^{2/3}$$



- 臨界点で jump が見られる
- $\beta = \frac{2}{3}$

$\sin 2\theta$ を付け加える

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N [\sin(\theta_j - \theta_i) + a \sin 2(\theta_j - \theta_i)]$$



- 中心多様体縮約を用いて $\beta = 1$ であることが示されている [Crawford 1995, Chiba 2011]。

$$r \sim \frac{2(1-a)}{K_c^3 C a} (K - K_c)^1 + \dots$$

$$C = \mathcal{PV} \int_{\mathbb{R}} d\omega \frac{g'(\omega)}{\omega}$$

- $a < 0$ で一山対称の $g(\omega)$ のとき

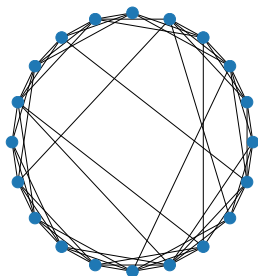
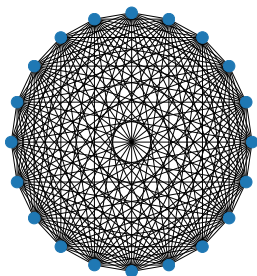
$$\beta = 1$$

スモールワールドネットワーク

- 現実のネットワークに関する研究
 - “6 次の隔たり”
 - 強いクラスター化

スモールワールド性

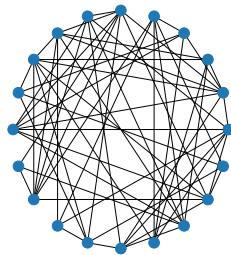
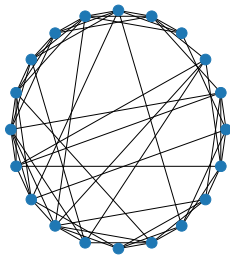
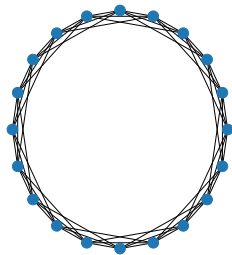
- 平均ノード間距離 $\langle l \rangle$ がノード数 N に対して $\langle l \rangle \ll N$
- 平均クラスター係数がノード数 N に依存しない
- **Watts-Strogatz model:** スモールワールド性を記述する代表的なモデル [Watts and Strogatz 1998]
- $O(N)$ 本の枝を持つ (全結合グラフは $O(N^2)$)



Watts–Strogatz model

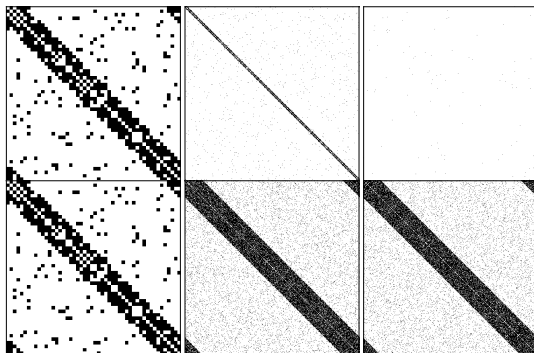
アルゴリズム

- 1 N 個の頂点を持つ k -隣接グラフを生成する。
- 2 kN 本の枝のそれぞれに対して、確率 p でエッジの一方 (ランダムに選ぶ) の結合を切り離し、 N 頂点の中からランダムに選ばれた頂点につなぎ替える。ただし、自己ループや多重エッジができないようにする。



$O(N^2)$ small-world との違い

[Chiba et al. 2018] の中でスモールワールドネットワーク上の蔵本モデルの計算をしているが、彼らは $k = \lfloor rN \rfloor, r \in (0, 0.5)$ としている。



- r の立ち上がりが

$$r \sim \frac{C}{\sqrt{-g''(0)}} (K - K_c)^{1/2} + \dots$$

- この設定だと β が $g(w)$ に依存することを示唆している。(全結合と変わらない結果になりうる。)