結合振動子系において
完全同期以外の安定平衡点を持つ
密なネットワークの探索

Finding dense networks that do not synchronize

米田亮介　立川剛至　寺前順之介

日本物理学会第 76 回年次大会

2021 年 3 月 15 日

京都大学大学院情報学研究科

ネットワーク上の一様な結合振動子系

ネットワーク上の一様な結合振動子系

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j \in [N]} a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i),\ \ i \in [N]$$

- $\theta_i \in [0, 2\pi)$: i 番目の振動子の位相
- $a_{ij} \in \{0, 1\}$: ネットワークの隣接行列の (i, j) 成分

- $\boldsymbol{\theta}_0 = (0, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T}$: 完全同期解、すべての位相が同じ
- この解はネットワークによらずに**安定**
  - 密であれば必ず同期すると期待 (完全同期のみが安定平衡点)
  - どれほど "密" であれば必ず同期する？

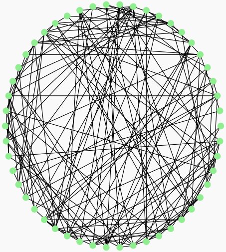
接続数 (connectivity)

connectivity μ

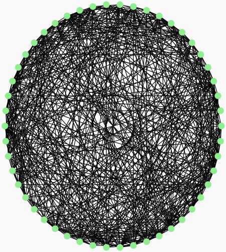
$$\mu = \frac{\min_{i\in[N]} \sum_{j\in[N]} a_{ij}}{N-1}$$

- μ はネットワークの “密具合” を表す
    - ネットワークの最小次数を規格化したもの
    - $\mu = 1$ のとき全結合ネットワーク

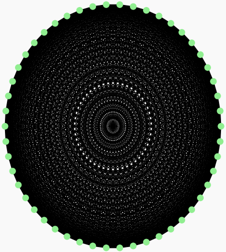
$\mu = \frac{2}{49} = 0.040\dots$



$\mu = \frac{10}{49} = 0.204\dots$



$\mu = \frac{49}{49} = 1$



臨界接続数 (critical connectivity)

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j \in [N]} a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i)$$

完全同期以外の安定平衡点が存在 (同期しない密なネットワーク)	完全同期のみが安定 (必ず同期するネットワーク)
$\mu \leq 0.6809\ldots$ (Wiley, 2006)	$\mu = 1$ (Watanabe, 1994)
$\mu \leq 0.6818\ldots$ (Canale, 2015)	$\mu \geq 0.9395\ldots$ (Taylor, 2012)
$\mu \leq 0.6828\ldots$ (Townsend, 2020)	$\mu \geq 0.7929\ldots$ (Ling, 2019)
	$\mu \geq 0.7889\ldots$ (Lu, 2020)

- μ_{c}: 臨界接続数、完全同期解のみが安定平衡点となる μ の境界

$$0.6828\cdots \leq \mu_{\mathrm{c}} \leq 0.7888\ldots$$

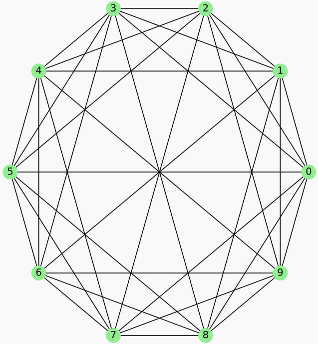
- 本研究: **できるだけ密な同期しないネットワークを探索する**

巡回グラフ

- ネットワークとして巡回グラフを考える
  - 巡回グラフの対応する隣接行列は巡回行列
  - $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^{N-1}$: 巡回行列を生成する列

$$a_{ij} = x_{i-j \bmod N}, \quad x_i = x_{N-i}$$

  - 強い対称性があるおかげで諸々の値の手計算が可能



x

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

p-twisted state と線形固有値

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j \in [N]} a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i)$$

- ネットワークが巡回グラフの場合、p-twisted state が平衡点

$$\boldsymbol{\theta}_p = \left(0, \frac{2\pi p}{N}, \frac{4\pi p}{N}, \ldots, \frac{2\pi(N-1)p}{N}\right)^{\mathsf{T}}, \quad 0 \le p \le \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$$

  - $p = 0$ は完全同期解
- p-twisted state まわりの Jacobian 行列の固有値 $\boldsymbol{\lambda}$

$$\lambda_k = \sum_{l \in [N-1]} x_l \cos\left(\frac{2\pi pl}{N}\right) \left[-1 + \cos\left(\frac{2\pi kl}{N}\right)\right]$$

  - $\lambda_0 = 0$: 系の大域的回転対称性より
  - $\lambda_k, k = 1, \ldots, N-1$ の正負が p-twisted state の安定性を決める

方針

- 安定平衡点を持つネットワークを色々取り替える

$$\Downarrow$$

その中で μ が最大となるネットワークを選ぶ

- **最適化問題**として定式化するのが良い。
  - 今回の問題では $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^{N-1}$ を探せば良いので**整数計画問題**として定式化できる。
  - 制約条件は一次式で書ける
    - $\lambda_k < 0 \Leftrightarrow L^{(N,p)}\boldsymbol{x} < \mathbf{0}$ (安定性)

$$\left[L^{(N,p)}\right]_{kl} = \cos\left(\frac{2\pi pl}{N}\right)\left[-1 + \cos\left(\frac{2\pi kl}{N}\right)\right]$$

    - $x_i = x_{N-i} \Leftrightarrow C^{(N)}\boldsymbol{x} = 0$ (無向グラフ)

$$\left[C^{(N)}\right]_{kl} = \delta_{k,l} - \delta_{k,N-l}$$

整数計画問題としての定式化

“N 体の振動子を持つ系において p-twisted state が安定平衡点になるようなネットワークの中で最大の connectivity はいくらか？”

整数計画問題 (N, p)

$N \geq 2, 1 \leq p \leq \lfloor N/2 \rfloor$ に対して

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \mu = \frac{1}{N-1}\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}, \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^{N-1}, \\ & L^{(N,p)}\boldsymbol{x} < \mathbf{0}, \quad \lambda_k < 0 \\ & C^{(N)}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \quad x_i = x_{N-i} \end{aligned}$$

- $\mu^{(N,p)}$: 各 N, p における整数計画問題の最大値

Theorem ($\mu^{(N,p)}$)

$N \geq 2, 1 \leq p \leq \lfloor N/2 \rfloor$ に対して $m = \gcd(N,p), \widetilde{N} = N/m$ とおく。

1. $\widetilde{N} = 2, 3, 4$ のとき実行可能解が存在しない。
2. $\widetilde{N} \geq 5$ のとき

$$S_k^{(\widetilde{N})} = \sum_{l=1}^{k} \cos\left(\frac{2\pi l}{\widetilde{N}}\right)\left[-1 + \cos\left(\frac{2\pi l}{\widetilde{N}}\right)\right]$$

とし、$k_{\mathrm{c}}^{(\widetilde{N})}$ を $S_k^{(\widetilde{N})} \geq 0$ なる最小の k と定義する。このとき、

$$\mu^{(N,p)} = \frac{m(2k_{\mathrm{c}} - 1) - 1 - 2\lfloor m S_{k_{\mathrm{c}}-1}/(S_{k_{\mathrm{c}}} - S_{k_{\mathrm{c}}-1}) \rfloor}{N-1}$$

μ_{c} の下限

Theorem ($\sup \mu^{(N,p)}$)

$$\begin{aligned}
&\sup\left\{\mu^{(N,p)} \,\middle|\, 1 \le p \le \lfloor N/2 \rfloor, N \ge 2\right\} \\
=& \lim_{m\to\infty} \mu^{(19m,m)} \\
=& \frac{11}{19} - \frac{2}{19} \frac{\sum_{l=1}^{5}\left[-\cos\left(\frac{2\pi l}{19}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi l}{19}\right)\right]}{-\cos\left(\frac{12\pi}{19}\right) + \cos^2\left(\frac{12\pi}{19}\right)} = \color{red}{0.683875\ldots}
\end{aligned}$$

- $\mu \le 0.6838\ldots$ なるネットワークが存在して、完全同期解以外の安定平衡点が存在する。

$$0.6838\cdots \le \mu_{\mathrm{c}} \le 0.7888\ldots$$

まとめと展望

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j\in[N]} a_{ij}\sin(\theta_j - \theta_i)$$

完全同期以外の安定平衡点が存在 (同期しない密なネットワーク)	完全同期のみが安定 (必ず同期するネットワーク)
$\mu \le 0.6809\ldots$ (Wiley, 2006)	$\mu = 1$ (Watanabe, 1994)
$\mu \le 0.6818\ldots$ (Canale, 2015)	$\mu \ge 0.9395\ldots$ (Taylor, 2012)
$\mu \le 0.6828\ldots$ (Townsend, 2020)	$\mu \ge 0.7929\ldots$ (Ling, 2019)
$\mu \le 0.6838\ldots$ (Yoneda, 2021)	$\mu \ge 0.7889\ldots$ (Lu, 2020)

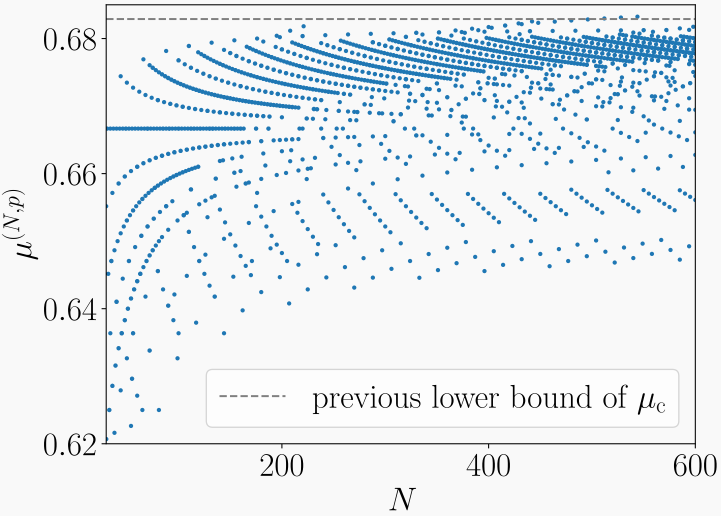
- **μ_c の下からの評価について**
  - 巡回グラフにおける他の平衡点？ 他のネットワーク？
- **μ_c の上からの評価について**
  - 勾配系のポテンシャル $E(\boldsymbol{\theta})$ に関するモース理論？

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial E(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \quad E(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j\in[N]} a_{ij}\cos(\theta_j - \theta_i)$$

APPENDIX

$\mu^{(N,p)}$ の数値計算

- 最適化ライブラリ: `JuMP(Julia)`, `pulp(Python)`



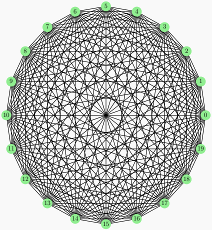
ネットワーク密度

ネットワーク密度 d

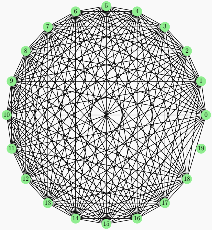
$$d = \frac{\sum_{i,j\in[N]} a_{ij}}{N(N-1)}$$

- 可能なすべての辺の数に対する辺の数の比
- 全結合ネットワークで $d = 1$
- d が大きいからといって同期するわけではない

$\mu = d = 1$



$\mu = 0, d = 0.9$



巡回行列

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ から生成される巡回行列 $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$

$$
\begin{aligned}
A = (a_{ij})_{1\le i,j\le N} &= (x_{j-i})_{1\le i,j\le N} \\
&= \begin{pmatrix}
x_0 & x_1 & \dots & x_{N-2} & x_{N-1} \\
x_{N-1} & x_0 & x_1 & & x_{N-2} \\
\vdots & x_{N-1} & x_0 & \ddots & \vdots \\
x_2 & & \ddots & \ddots & x_1 \\
x_1 & x_2 & \dots & x_{N-1} & x_0
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- 行列 A の固有値 $\lambda_k, k = 0, 1, \dots, N-1$

$$
\lambda_k = \sum_{l=0}^{N-1} x_l \exp\left(\frac{2\pi ikl}{N}\right)
$$

$(N, p) = (19m, m)$