数的理解
1/20: 試験 1

米田亮介

1 関数とグラフ

次の条件でりんごとみかんを買うことにした。

ア: りんごは 2 個以上

イ: りんごは 7 個以下

ウ: みかんは 3 個以上

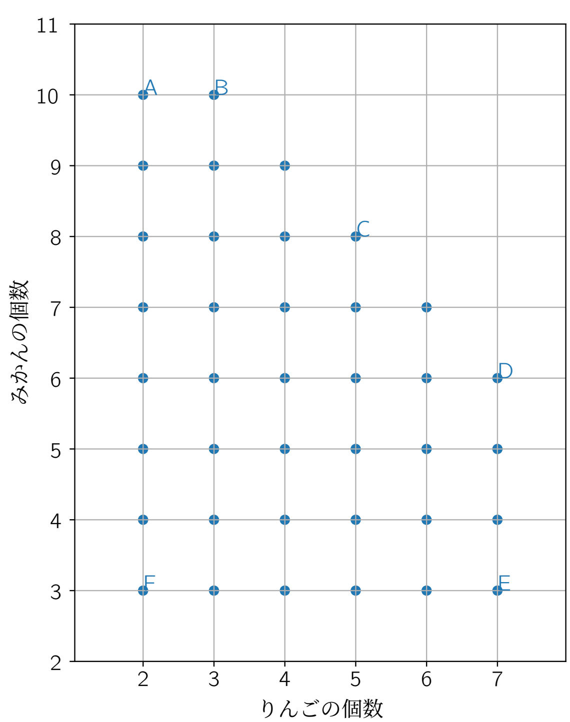
エ: みかんは 10 個以下

オ: りんごとみかんの合計は 13 個以下

りんごの個数を横軸、みかんの個数を縦軸にとって図示すると、上記の 5 つの条件を満たす組み合わせは図のように示される。

問題 1 点 B と点 D を通る直線で示される境界は、上のどの条件によるものか。

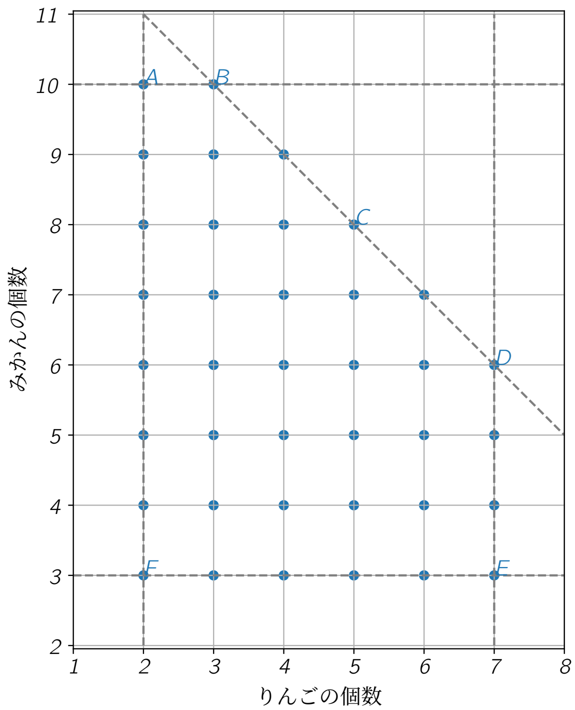
問題 2 点 A から点 F のうち、りんごとみかんの個数の合計が点 C で表される個数の合計と等しくなる点はどれか。



答え． __***問題 1***__ りんご、みかんの個数をそれぞれ x, y とすると、条件アから条件オは

$$2 \leq x \leq 7, \quad 3 \leq y \leq 10, \quad x + y \leq 13$$

と表される。特にその境界条件 *(*不等式の大小を取り除いて等号に変えたもの*)* について線を引くと次の図が得られる。



B と D を通る直線は $x + y = 13$ の直線であり、これは**条件オ**の境界条件に対応する。

__***問題 2***__ 点 C のりんごとみかんの個数の合計は $5 + 8 = 13$ 個である。よって、$x + y = 13$ の直線上の点を列挙すればよい。これはちょうど条件オの境界条件に対応していて、上の図より**点** $\boldsymbol{B}$ **と点** $\boldsymbol{D}$ がこの直線上に乗っていることがわかる。

2　n 進数

次の 2 進数による足し算・掛け算を 10 進数で答えよ。

問題 3　$101 + 1100100$

問題 4　11111×10010

答え． **問題 *3*** はじめに *2* 進数による足し算を行って、得られた結果を *10* 進数に変換する、という方針で解いてみよう。

$$\begin{array}{r} 101 \\ +\ 1100100 \\ \hline 1101001 \end{array}$$

1101001 を *10* 進数に変換すると、$2^6+2^5+2^3+2^0=105$ である。よって答えは ***105*** である。

2 進数による足し算が煩わしい、間違えそう、と思うならば、先に *2* 進数を *10* 進数に変換して、その後に足し算を行ってもよい。$101, 1100100$ をそれぞれ *10* 進数に変換すると、$2^2+2^0=5, 2^6+2^5+2^2=100$ である。よって答えは $100+5=105$ である。この結果は *2* 進数による足し算を先に行った場合と一致している。ただし、この方法だと *2* 進数による変換を *2* 回も行う必要があって若干計算量が増える。

問題 *4* 問題 *3* と同様に *2* 進数による掛け算を行って、得られた結果を *10* 進数に変換する、という方針で解く。

$$\begin{array}{r} 11111 \\ \times\ 10010 \\ \hline 11111 \\ 11111 \\ \hline 1000101110 \end{array}$$

1000101110 を *10* 進数に変換すると、$2^9+2^5+2^3+2^2+2^1=558$ である。よって答えは ***558*** である。

先に *2* 進数を *10* 進数に変換してみよう。$11111, 10010$ はそれぞれ $2^4+2^3+2^2+2^1+2^0=31, 2^4+2^1=18$ と *10* 進数に変換される。よって $31\times18=558$ と計算できて、上の結果にも一致する。

3 確率

1 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 5 枚のカードが箱の中に入っている。5 枚のカードの中には同じ数字のカードはないものとする。

問題 5 この箱から 1 枚のカードを 2 回続けて引いたとき、2 回とも奇数になる確率はいくらか。ただし、一度引いたカードはもとに戻さないものとする。

問題 6 この箱からカードを 1 枚引き、そのカードの数字を記録してもとに戻す。この作業を 3 回続けた場合、記録した数字が引いた順に偶数、奇数、偶数になる確率はいくらか。

答え． **問題 *5*** 求めるべきは確率なので、まずは全事象を求めよう。すなわち、*2* 回続けてカードを引いたときの出る数字の場合の数は、*1* 回目が *5* 通り、*2* 回目が *4* 通りなので、

$$5\times4=20(\text{通り})$$

である。一方で、*1* から *5* の中で奇数のカードは *1,3,5* の *3* 枚である。よって *2* 回とも奇数である場合の数は、*1* 回目が *3* 通り、*2* 回目が *2* 通りなので、

$$3 \times 2 = 6(\text{通り})$$

である。よって求める確率は、

$$\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

である。

問題 *6* 前問と違って、今回はカードを引くたびに箱に戻すことをする。よって、この作業を *3* 回するときに出るカードの数字の場合の数は、

$$5 \times 5 \times 5 = 125(\text{通り})$$

である。このうち、出た数字が偶数、奇数、偶数になる場合の数は、偶数が *2,4* の *2* 通り、奇数が *1,3,5* の *3* 通りなので、

$$2 \times 3 \times 2 = 12(\text{通り})$$

である。よって、求める確率は、

$$\frac{12}{125}$$

である。

4　論理

P,Q,R,S の 4 つの学校があり、その全校生徒数について次のことがわかっている。

条件 I　P は Q より全校生徒数が多い

条件 II　最も全校生徒数が少ない学校は Q ではない

問題 7　次の推論ア、イ、ウのうち、必ずしも誤りとはいえないものはどれか。

ア: P は 1 番全校生徒数が多い

イ: S は R より全校生徒数が少ない

ウ: R は P より全校生徒数が多い

問題 8　次の推論カ、キ、クのうち、最も少ない情報で全校生徒数の順番を確定するにはどれが加わればよいか。

カ: R は S より全校生徒数が多い

キ: R は Q より全校生徒数が多い

ク: P は R より全校生徒数が多い

答え. 全校生徒数についての順位を考える。条件 I から Q は P よりも全校生徒数が少ないので、Q が一番全校生徒数が多いことはありえない。また、条件 II から Q は全校生徒数が一番少ないわけでもない。よって Q は *2* もしくは *3* 番目に全校生徒数が多いことがわかる。これをもとにありうる通りをすべて書き下すと次の表のようにまとめられる。

	1 位	2 位	3 位	4 位
①	P	Q	R	S
②	P	Q	S	R
③	P	R	Q	S
④	P	S	Q	R
⑤	R	P	Q	S
⑥	S	P	Q	R

問題 *7* それぞれの推論が正しいような場合が上の表にあるかを確認すれば良い。

ア: ①から④においては P が *1* 番全校生徒数が多い。よってアは誤りとはいえない。

イ: ③と⑤において S は R よりも全校生徒数が少ない。よってもイは誤りとはいえない。

ウ: ⑤において R は P よりも全校生徒数が多い。よってウは誤りとはいえない。

以上よりア・イ・ウのいずれについても、必ずしも誤りとはいえない。

問題 *8* カ、キ、クの条件がそれぞれ与えられたときに条件を満たすものに丸をつけると次のような表にまとめられる。このとき、最も少ない情報で順番が確定すれば良いので、最初は

	1 位	2 位	3 位	4 位	カ	キ	ク
①	P	Q	R	S	○		○
②	P	Q	S	R			○
③	P	R	Q	S	○	○	○
④	P	S	Q	R			○
⑤	R	P	Q	S	○	○	
⑥	S	P	Q	R			○

カ・キ・クの中から *1* つだけ条件を選んだ場合を考える。カだけの場合は *3* 通り、キだけの場合は *2* 通り、クだけの場合は *5* 通り、といずれの場合も *1* 通りに条件は定まらない。次に条件から *2* つを選んだ場合を考える。カとキを選んだ場合、③または⑤の *2* 通りが得られる。カとクを選んだ場合、①または③の *2* 通りが得られる。キとクを選んだ場合、③の *1* 通りが得られる。よって、キとクの *2* つの条件を選んだときに順番が *1* つに確定する。

5　損益算

ある商品を定価の 16 %引きで販売して、そのときの利益が原価の 5 %になるようにしたい。

問題 9 定価が 5000 円だとすると、そのときの原価はいくらか。

問題 10 原価が 2400 円だとすると、そのときの定価はいくらか。

答え． **問題 *9*** 原価を x(円) とする。定価の *16* %引きをしたときに、原価の *5* %の利益がつくので、売値に関する式を立てると、

$$5000 \times \frac{84}{100} = x \times \frac{105}{100}$$

となる。この方程式を解くと、$x = 4000$ であり、原価は *4000* 円であることがわかった。

問題 *10* 定価を y(円) とする。売値に関する式を立てると、

$$y \times \frac{84}{100} = 2400 \times \frac{105}{100}$$

となる。この方程式を解くと、$y = 3000$ であり、定価は *3000* 円であることがわかった。

別解原価を x(円)、定価を y(円) とおくと、売値について

$$y \times \frac{84}{100} = x \times \frac{105}{100}$$

という式が立つ。これより、

$$y = 1.25x$$

という式が得られ、この商品の定価は原価の *1.25* 倍、すなわち *25* %の利益を見込んでつけられたことがわかる。これをもとに問題を見直すと、定価で *5000* 円であるとき、原価は

$$5000 \div 1.25 = 4000(\text{円})$$

であり、原価が *2400* 円であるときには、定価は

$$2400 \times 1.25 = 3000(\text{円})$$

であると簡単に求まる。

6　濃度算

4 %の食塩水 150g と 12 %の食塩水 250g を混ぜた。

問題 11　混ぜて出来た食塩水の濃度は何%か。

問題 12　混ぜて出来た食塩水に水を加えたところ、濃度が 8 %の食塩水が出来た。水を何 g 加えたか。

答え． **問題 *11*** *4* %の食塩水 *150g* に含まれる食塩は

$$150 \times \frac{4}{100} = 6(\text{g})$$

であり、*12* %の食塩水 *250g* に含まれる食塩は

$$250 \times \frac{12}{100} = 30(\mathrm{g})$$

である。このとき食塩水を混ぜると、食塩水全体の重さは

$$150 + 250 = 400(\mathrm{g})$$

であり、食塩の重さは

$$6 + 30 = 36(\mathrm{g})$$

である。よって、混ぜて出来た食塩水の濃度は

$$\frac{36}{400} \times 100 = 9\%$$

と求まる。

問題 *12* 加えた水の重さを x(g) とおく。このとき、食塩水全体の重さは

$$400 + x(\mathrm{g})$$

であり、食塩の重さは変わらず *36g* である。よって、濃度に関する式を立てると、

$$\frac{36}{400 + x} \times 100 = 8$$

となる。これを解くと、$x = 50$ と求まり、水を *50g* 加えたことがわかる。

7 割合

ある学校では、今年の全校生徒数が前年の全校生徒数より 20 人増えて 520 人になった。これを男女別にみると、前年の生徒数に対して男子が 15 %増、女子が 10 %減だったという。

問題 13 前年の男子の生徒数は何人か。

問題 14 今年の女子の生徒数は今年の全校生徒数の何%を占めるか。最も近い値を選べ。

答え. **問題 *13*** 前年の全校生徒数は $520 - 20 = 500$(人) である。このうち、前年の男子の生徒数を x(人) とおくと、前年の女子の生徒数は $500 - x$(人) である。このとき、今年の男子の生徒数は

$$x \times \frac{115}{100} = \frac{23}{20}x(\text{人})$$

である。また、今年の女子の生徒数は

$$(500 - x)\frac{90}{100} = \frac{9}{10}(500 - x)(\text{人})$$

である。今年の全校生徒数は 520(人) であるから、

$$\frac{23}{20}x + \frac{9}{10}(500 - x) = 520$$

という式が立つ。これを解くと、$x = 280$ であり、前年の男子の生徒数は *280* 人と求まる。

問題 *14* 前年の女子の生徒数は $500 - x = 220$(人) であり、今年の女子の生徒数は

$$220 \times \frac{90}{100} = 198(\text{人})$$

である。よって今年の女子の生徒数が全校生徒数の占める割合は

$$\frac{198}{520} \times 100 = 38.07\ldots\%$$

と求まる。

8 論理

りんごが大好きな X 君は 1 個 500 円の高級りんご P、1 個 100 円の程よいりんご Q、1 個 50 円の訳ありりんご R を購入して食べ比べたい。ただし、以下の条件がある。

条件ア: りんご P,Q,R をそれぞれ少なくとも 1 個買う

条件イ: りんご R の購入数はりんご P、りんご Q の購入数のいずれよりも少ない

問題 15 X 君の予算は 1500 円である。1500 円以内でりんご P,Q,R を購入するとき、次の推論のうち誤りとはいえないものはいずれか。(複数選択可)

1. りんご P の購入数はりんご Q の購入数よりも多かった
2. りんご P の購入数は 2 個であった
3. りんご Q の購入数が一番多かった

答え. **問題 *15*** 条件アと条件イから、りんご P,Q は少なくとも *2* 個以上、りんご R は少なくとも *1* 個以上購入する必要があることがわかる。このもとで推論 *1,2,3* をそれぞれ見てみよう。

1. りんご P の購入数がりんご Q の購入数よりも多いとき、りんご P を少なくとも *3* 個以上購入する必要がある。このときの値段は少なくとも

$$500 \times 3 + 100 \times 2 + 50 \times 1 = 1750(\text{円})$$

となり、これは予算の *1500* 円をオーバーしてしまう。よって推論 *1* は誤りである。

2. りんご P の購入数が *2* 個の場合、例えばりんご Q を *2* 個、りんご R を *1* 個購入することを考えると、値段は

$$500 \times 2 + 100 \times 2 + 50 \times 1 = 1250(\text{円})$$

と、予算の *1500* 円以内に収まっている。よって推論 *2* は誤りとはいえない。

3. りんご Q の購入数が一番多かったとき、例えばりんご Q を 3 個購入した場合を考えよう。このとき、りんご P は 2 個、りんご R は 1 個購入したことになる。値段は

$$500 \times 2 + 100 \times 3 + 50 \times 1 = 1350(\text{円})$$

と、予算の 1500 円以内に収まっている。よって推論 3 は誤りとはいえない。

以上より、必ずしも誤りとはいえない推論は 2,3 である。