数的理解
1/27: 試験 2

米田亮介

1　論理

P～T の 5 人が精肉店で買い物した。次がわかっている。

- 豚肉を買ったのは 3 人
- 牛肉を買ったのは 2 人
- 鶏肉を買ったのは 2 人
- 惣菜を買ったのは 2 人
- 鴨肉を買ったのは 1 人

また、P～T は、自分が買ったものについて次のように話している。

P: 牛肉は買ったが惣菜は買っていない

Q: 鶏肉は買ったが豚肉は買っていない

R: 惣菜は買ったが牛肉は買っていない

S: 鶏肉は買ったが豚肉は買っていない

T: 鴨肉ともう 1 つ、合わせて 2 種類買った

問題 1 次の 3 つの記述のうち、必ず正しいといえるものの組み合わせを選びなさい。

ア: P は鶏肉を買っていない
イ: R は豚肉を買った
ウ: T は牛肉を買った

問題 2 次の 3 つの記述のうち、正しい可能性のあるものの組み合わせを選びなさい。

ア: Q は 3 種類買った
イ: S は 1 種類買った
ウ: Q が買ったものは R は買わず、R が買ったものは Q は買わなかった

問題 3 次の 3 つの記述のうち、必ず正しいものの組み合わせを選びなさい。

ア: Q が買ったのが 3 種類であれば、S は惣菜を買っている
イ: S が買ったのが 1 種類であれば、Q は惣菜を買っている
ウ: S が惣菜を買っていれば、Q は牛肉を買っている

答え. P〜T が豚肉、牛肉、鶏肉、惣菜、鴨肉を買ったかどうかの表を作ってみると次のようになる。はじめに条件からわかることを黒色でチェックし、そのあと推論からわかることを赤色でチェックした。

	P	Q	R	S	T	合計
豚肉	✓	✗	✓	✗	✓	3
牛肉	✓		✗		✗	2
鶏肉	✗	✓	✗	✓	✗	2
惣菜	✗		✓		✗	2
鴨肉	✗	✗	✗	✗	✓	1
合計					2	

問題 *1* 条件アから条件ウが必ず正しいかどうかを確認していく。

ア: 上の表から P は鶏肉を買っていない。よって条件アは必ず正しい。

イ: 上の表から R は豚肉を買っている。よって条件イは必ず正しい。

ウ: 上の表から T は牛肉を買っていない。よって条件ウは誤りである。

よって条件アと条件イが必ず正しい。

問題 *2* 条件アから条件ウがありえる場合があるかを確認すればよい。

ア: 次のようにすれば Q は *3* 種類購入することができる。よって条件アは正しい可能性がある。

	P	Q	R	S	T	合計
豚肉	✓	✗	✓	✗	✓	3
牛肉	✓	✓	✗	✗	✗	2
鶏肉	✗	✓	✗	✓	✗	2
惣菜	✗	✓	✓	✗	✗	2
鴨肉	✗	✗	✗	✗	✓	1
合計					2	

イ: 上の表のもとで、S は *1* 種類のみ購入する条件を満たすことができる。よって条件イは正しい可能性がある。

ウ: 次のようにすれば条件を満たす。よって条件ウは正しい可能性がある。

	P	Q	R	S	T	合計
豚肉	✓	✗	✓	✗	✓	3
牛肉	✓	✓	✗	✗	✗	2
鶏肉	✗	✓	✗	✓	✗	2
惣菜	✗	✗	✓	✓	✗	2
鴨肉	✗	✗	✗	✗	✓	1
合計					2	

よって条件アと条件イと条件ウが正しい可能性がある。

<u>問題 *3*</u> それぞれの条件が必ず正しいかどうかを確認していく。

ア: Q が *3* 種類購入している場合、次の表にしかなりえない。このとき S は惣菜を購入していない。よって条件アは誤りである。

	P	Q	R	S	T	合計
豚肉	✓	✗	✓	✗	✓	3
牛肉	✓	✓	✗	✗	✗	2
鶏肉	✗	✓	✗	✓	✗	2
惣菜	✗	✓	✓	✗	✗	2
鴨肉	✗	✗	✗	✗	✓	1
合計					2	

イ: S が *1* 種類しか購入していない場合も条件アの表にしかなりえない。このとき Q は惣菜を購入しているので条件イは必ず正しい。

ウ: S が惣菜を購入しているとき、このような場合には Q は牛肉を購入していないという状況がありえる。よって条件ウは誤りである。

	P	Q	R	S	T	合計
豚肉	✓	✗	✓	✗	✓	3
牛肉	✓	✗	✗	✓	✗	2
鶏肉	✗	✓	✗	✓	✗	2
惣菜	✗	✗	✓	✓	✗	2
鴨肉	✗	✗	✗	✗	✓	1
合計					2	

よって条件イが必ず正しい。

2　順列・組み合わせ

大中小 3 つのサイコロを投げる。

問題 4　大のサイコロの目が 1 になる場合の数はいくらか。

問題 5　大中小のサイコロの出た目のうち少なくとも 1 つが偶数である場合の数を求めよ。

答え. <u>問題 *4*</u> 大のサイコロの目は *1* に確定しているので *1* 通りしかないが、中と小のサイコロの目は何でも良いので、それぞれ *6* 通りの可能性がある。よって場合の数は

$$1 \times 6 \times 6 = 36(\text{通り})$$

である。

<u>問題 *5*</u> この問題文のように「少なくとも〇〇」という場合の数を求める場合には余事象を考えるのが良い。すなわち、「少なくとも *1* つが偶数である」場合の数は、「すべて偶数でない

(すべて奇数である)」場合の数を全体の場合の数から引いたものに等しいのである。すべての場合の数は大中小のサイコロの目がそれぞれ *6* 通りあるので、

$$6 \times 6 \times 6 = 216(\text{通り})$$

である。一方、すべてが奇数である場合の数は大中小のサイコロの目がそれぞれ *1,3,5* のいずれかが出ればよいので、

$$3 \times 3 \times 3 = 27(\text{通り})$$

とわかる。よって、少なくとも *1* つが偶数である場合の数は

$$216 - 27 = 189(\text{通り})$$

と求まる。

3　集合と割合の融合問題

生徒 50 人にご飯とパンのどちらが好きかというアンケートを行ったところ、次の結果を得た。

- ご飯が好きな生徒は 30 人である
- パンだけが好きな生徒はご飯もパンも好きではない生徒の 3 倍である
- どちらも好きな生徒は全体の 1/5 である

問題 6 ご飯が好きだがパンが好きではない生徒は何人か。

問題 7 パンが好きだがご飯が好きではない生徒は何人か。

問題 8 別の生徒 30 人に同じアンケートを行い、結果を先ほどのアンケートに合算したところ、パンもご飯も好きではない生徒は全体の 7/40 となった。後にアンケートを取った 30 人の中で、ご飯もパンも好きではない生徒は何人か。

問題 9 前問の作業を行ったところ、パンは好きだがご飯は好きではない生徒の数が 8/5 倍になった。ご飯が好きではない生徒は何倍になったか。

答え. ご飯とパンが好きかどうかのカルノー図を書くと次のようになる。

	ご飯○	ご飯×	合計
パン○	10 人	15 人	25 人
パン×	20 人	5 人	25 人
合計	30 人	20 人	50 人

問題 *6* ご飯が好きだがパンが好きではない生徒の数は *20* 人である。

問題 *7* パンが好きだがご飯が好きではない生徒の数は *15* 人である。

問題 *8* *30* 人分のアンケートを追加するので、合計は *80* 人になる。このとき、カルノー図は次のようになる。もとの *50* 人分のアンケートでは、ご飯もパンも好きでない生徒の数は *5* 人

	ご飯○	ご飯×	合計
パン○			
パン×		14 人	
合計			80 人

だったので、*30* 人の中でご飯もパンも好きでない生徒は

$$14 - 5 = 9(\text{人})$$

と求まる。

問題 *9* もとのアンケートではパンは好きだがご飯は好きではない生徒の数が *15* 人だった。なので、*80* 人分のアンケートでパンが好きだがご飯は好きではない生徒の数は

$$15 \times \frac{8}{5} = 24(\text{人})$$

とわかる。これよりカルノー図を埋めると次のようになる。よってご飯が好きではない生徒

	ご飯○	ご飯×	合計
パン○		24 人	
パン×		14 人	
合計	42 人	38 人	80 人

の数は *20* 人から *38* 人へ

$$\frac{38}{20} = \frac{19}{10}(\text{倍})$$

になった。

4 数列

1 から順番に奇数を並べた次の数列がある。

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$$

問題 10 この数列の 20 番目の数字を求めよ。

問題 11 この数列の 1 番目から 20 番目までの数字の合計はいくらか。

答え. 問題 *12* この数列は差が *2* の等差数列である。*20* 番目の数字に至るまで、$20 - 1 = 19$ 回 *2* が足されていくので、*20* 番目の数字は

$$1 + 2 \times 19 = 39$$

である。

問題 *13* 等差数列の和を求め方が台形の面積の公式に似ていたことを思い出すと、*1* 番目が *1*、*20* 番目が *39* の数列の和は

$$\frac{1}{2}(1+39)\times 20 = 400$$

である。

考察奇数の和は二乗した値になることが知られている。確認してみよう。一般に n 番目の数字は $2n-1$ なので *1* 番目から n 番目までを足すと、

$$\frac{1}{2}[1+(2n-1)]\times n = n^2$$

となり、確かに n 番目までを足すと n^2 と n の二乗になっていることがわかる。今の場合、*20* 番目までの数字の合計を知りたいが、これは $20^2 = 400$ と確かに一致している。

5　方程式

あるパン屋では、クロワッサン 1 個 120 円、マフィン 1 個 240 円、サンドイッチ 1 個 320 円で販売している。

問題 12 土曜日には、3 種類合わせて 300 個販売し、売上は 50000 円であった。クロワッサンはサンドイッチの 4 倍売れたとすると、サンドイッチは何個売れたか。

問題 13 日曜日には、3 種類合わせて 410 個販売し、売上は 80000 円であった。マフィンはサンドイッチの 2 倍の数が売れたとすると、クロワッサンだけの売上はいくらか。

答え. 問題 *12* サンドイッチが x 個売れたとしよう。このとき、クロワッサンは $4x$ 個、マフィンは $300-(x+4x)=300-5x$ 個売れた。売上に関する式を立てると、

$$120\times 4x + 240\times(300-5x) + 320\times x = 50000$$

である。これを解くと、$x=55$ であり、サンドイッチは *55* 個売れたことがわかる。

問題 *13* いきなりクロワッサンの売上を計算するのは難しいので、まずはサンドイッチの売れた個数を x 個としよう。すると、マフィンは $2x$ 個、クロワッサンは $410-(x+2x)=410-3x$ 個売れた。売上に関する式を立てると、

$$120\times(410-3x) + 240\times 2x + 320\times x = 80000$$

である。これを解くと $x=70$ であるからクロワッサンは $410-3\times 70 = 200$ 個売れたことがわかる。これよりクロワッサンだけの売上は

$$120\times 200 = 24000(\text{円})$$

である。

6　距離と時間と速さ

A さんは分速 60m で歩いて家を出た。その 20 分後に A さんの姉が自転車に乗って A さんを追いかけた。

問題 14 A さんの姉は分速 300m で A さんを追いかけたとき、A さんの姉は家を出てから何分後に A さんに追いつくか。

問題 15 A さんの姉が家を出てから 6 分後に A さんに追いついたとき、A さんの姉は分速何 m で A さんを追いかけたか。

答え. **問題 *14*** A さんの姉が家を出てから x 分後に A さんに追いついたとしよう。このとき、A さんは $20+x$ 分間歩くことになる。二人が歩いた距離は等しいので、

$$60 \times (20+x) = 300 \times x$$

という式が立つ。これを解けば $x=5$ と求まるので、A さんの姉は家を出てから *5* 分後に A さんに追いつくことがわかる。

問題 *15* A さんの姉が分速 y で A さんを追いかけたとしよう。A さんは $20+6=26$ 分間歩いたので、

$$60 \times 26 = 6 \times y$$

という式が立つ。これを解けば $y=260$ と求まるので、A さんの姉は分速 *260m* で A さんを追いかけたことがわかる。